سلسلة الرؤي

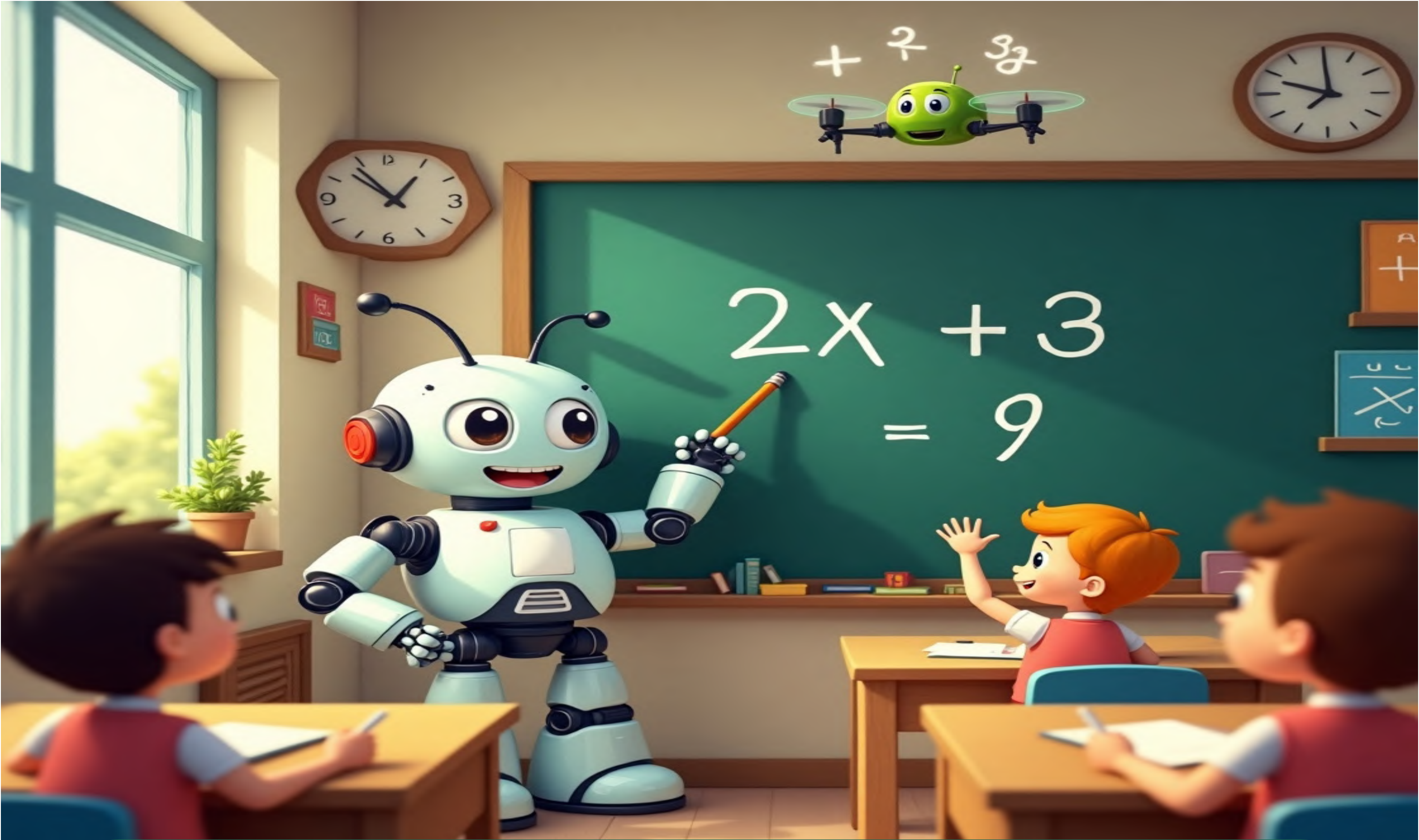
فى الرياضيات

الصف الثاني الإعدادي

إعداد

أ/ إبراهيم عبد الصمد

01277321091



الوحدة الأولي

الدرس الأول	مجموعة الأعداد غير النسبية Q'
الدرس الثاني	الفترات والعمليات عليها
الدرس الثالث	العمليات علي الأعداد الحقيقية
الدرس الرابع	قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية
الدرس الخامس	قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية



مجموعة الأعداد غير النسبية Q'

الأعداد غير النسبية

العدد غير النسبي هو عدد لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a,b عددان صحيحان و $b \neq 0$
ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز Q'

أمثلة للأعداد الغير نسبية

1. الجذر التربيعي لعدد نسبي ليس مربعاً كاملاً
مثل $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$
2. الجذر التكعيبي لعدد نسبي ليس مكعباً كاملاً
مثل $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}$
3. العدد $\pi \approx 3.141592654...$
ويساوى النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها
4. النسبة الذهبية φ حيث $\varphi \approx 1.618033989...$
وهي نسبة ترتبط بجمال وتناسق التصميمات.

مثال 1

أكمل بوضع Q أو Q' (شفوي مع الطالب)

1. $3 \in$ ....
2. $\sqrt{6} \in$ ....
3. $\pi \in$ ....
4. $\sqrt[3]{16} \in$ ....
5. $\sqrt{5} \in$ ....
6. $25\% \in$ ....

حاول بنفسك 1

أكمل بوضع Q أو Q'

1. $-12 \in$ ....
2. $\sqrt{25} \in$ ....
3. $2\frac{2}{5} \in$ ....
4. $\sqrt{13} \in$ ....
5. $\sqrt[3]{10} \in$ ....
6. $3.\bar{6} \in$ ....

إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبى

أي عدد غير نسبى يقع بين عددين نسبيين، ويمكن تمثيله على خط الأعداد بنقطة تقع بين هذين العددين

مثال 2

أوجد عددين صحيحين ينحصر بينها:

1. $\sqrt{11}$

الحل

$\because 9 < 11 < 16$

$\therefore 3 < \sqrt{11} < 4$

$\therefore \sqrt{11}$ ينحصر بين 3 و 4

2. $\sqrt[3]{20}$

الحل

$\because 8 < 20 < 27$

$\therefore 2 < \sqrt[3]{20} < 3$

$\therefore \sqrt[3]{20}$ ينحصر بين 2 و 3

حاول بنفسك 2

أوجد عددين صحيحين ينحصر بينها:

1. $\sqrt{7}$

2. $\sqrt[3]{30}$

مثال 3 أوجد قيمة n حيث $n \in z$ إذا كان:

1. $n < \sqrt{17} < n+1$

الحل

$\because \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$

$\therefore 4 < \sqrt{17} < 5$

$\therefore n = 4$

2. $n < \sqrt[3]{13} < n+1$

الحل

$\because \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{13} < \sqrt[3]{27}$

$\therefore 2 < \sqrt[3]{13} < 3$

$\therefore n = 2$

حاول بنفسك 3 أوجد قيمة n حيث $n \in z$ إذا كان:

1. $n < \sqrt{15} < n+1$

2. $n < \sqrt[3]{67} < n+1$

لاحظ

يمكن استخدام الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للعدد النسبي وقيمة n هي العدد الصحيح

معلومة

نسبة طول المستطيل الذهبي الى عرضه تساوي

$1.6 \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

مثال 4 قدر قيمة كلاً من

1. $\frac{1+\sqrt{26}}{3}$

الحل

$\sqrt{25} < \sqrt{26} < \sqrt{36}$

$5 < \sqrt{26} < 6$

$\sqrt{26}$ أقرب الى $5 = \sqrt{25}$

$\frac{1+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$

2. $\frac{3+\sqrt{17}}{7}$

الحل

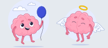
تذكر



طول ضلع مربع = $\sqrt{\text{مساحته}}$

شغل دماغك 1





غرفة مربعة الشكل مساحة أرضيتها 15 م^2 يريد أحمد أن يحيط أرضيتها بشريط زخرفي، قدر طول هذا الشريط

الحل

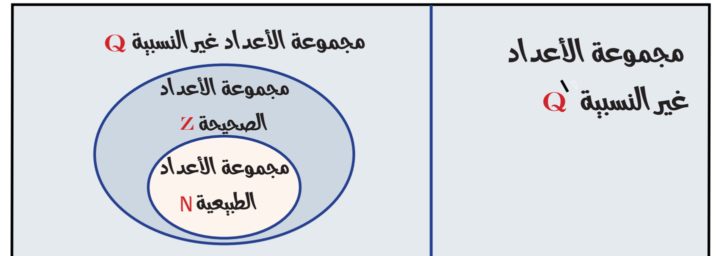
الأعداد الحقيقية: R

مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة التي تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز R أي أن $R = Q' \cup Q$ حيث $Q' \cap Q = \Phi$

شكل فن المقابل يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد حيث

$N \subset Z \subset Q \subset R$ $\qquad$ $Q` \subset R$

مجموعة الأعداد الحقيقية R



مثال 5 ضع في المربع الخالي رمزاً مناسباً من $\in$ أو $\notin$

(شفوي مع الطالب)

1. $3.\overline{6}$ □ $Q`$
2. $\sqrt{5}$ □ R
3. $|-4|$ □ N
4. $\sqrt[3]{3\frac{3}{3}}$ □ Z
5. $\sqrt[3]{3}$ □ Q
6. $\sqrt{-1}$ □ $Q`$

حاول بنفسك 4 أكمل بوضع N ، Z ، R ، $Q`$ ، Q

1. العدد $\sqrt{16}$ ينتمي الى كل من المجموعات..........و..............
2. العدد $\sqrt{36}$ ينتمي الى كل من المجموعات.........و.............و..........و..........
3. العدد $\frac{2}{3}$ ينتمي الى كل من المجموعات.........و..............
4. العدد $\sqrt[3]{-27}$ ينتمي الى كل من المجموعات.........و..............و

مثال 6 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

1. $3x^2 - 7 = 8$ حيث $x \in Q`$

$\because 3x^2 - 7 = 8$

$\therefore 3x^2 = 8 + 7 = 15$

$\therefore x^2 = \frac{15}{3} = 5$

$\therefore x = \pm\sqrt{5} \in Q`$

مجموعة الحل هي $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

2. $4x^3 + 15 = -17$ حيث $x \in Q`$

$\because 4x^3 + 15 = -17$

$\therefore 4x^3 = -17 - 15 = -32$

$\therefore x^3 = \frac{-32}{4} = -8$

$\therefore x = \sqrt[3]{-8} = -2 \notin Q`$ مجموعة الحل هي Φ

3. $\frac{1}{2}x^2 + 1 = -4$ حيث $x \in R$

$\because \frac{1}{2}x^2 + 1 = -4$

$\therefore \frac{1}{2}x^2 = -4 - 1 = -5$

$\therefore x^2 = -5 \times 2 = -10$

$\therefore x = \pm\sqrt{-10} \notin R$ مجموعة الحل هي Φ

4. $5x^3 - \frac{1}{4} = 4x^3 + 8\frac{3}{4}$ حيث $x \in R$

$\because 5x^3 - \frac{1}{4} = 4x^3 + 8\frac{3}{4}$

$\therefore 5x^3 - 4x^3 = 8\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$\therefore x^3 = 9$

$\therefore x = \sqrt[3]{9} \in R$ مجموعة الحل هي $\{\sqrt[3]{9}\}$

حاول بنفسك 4 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

1. $2x^2 - 1 = 7$ حيث $x \in Q`$



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1) أي من الأعداد التالية عدد غير نسبي ؟

أ) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ ب) $0.\overline{3}$

جـ) $\sqrt{5}$ د) $\sqrt[3]{-125}$

2) إذا كان $x < \sqrt{29} < x+1, x \in z$ فما قيمة x ؟

أ) 5 ب) 7

جـ) 6 د) 4

3) ماتقدير العدد $\sqrt{41}$ لأقرب عدد صحيح ؟

أ) 7 ب) 49

جـ) 6 د) 8

4) ماتقدير العدد $\sqrt[3]{25}$ لأقرب عدد صحيح ؟

أ) 3 ب) 2

جـ) 5 د) 12.5

5) إذا كان $1 < \sqrt{n} < 2$ فأي مما يلي قيمة محتملة للعدد n ؟

أ) 4 ب) 1

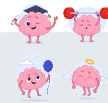
جـ) 2 د) 8

2) $3x^3 + 5 = 11$ حيث $x \in Q$

3) $\frac{1}{3}x^3 + 9 = 0$ حيث $x \in R$

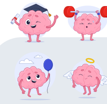
4) $x^3 - \frac{1}{4} = 4x^3 + 8\frac{3}{4}$ حيث $x \in R$

شغل دماغك 2



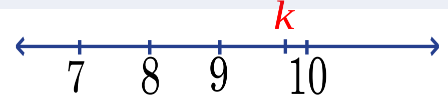
حديقة مستطيلة الشكل مساحتها 80 م^2 طولها ضعف عرضها، أوجد كلاً من الطول والعرض

شغل دماغك 3



مكعب مساحة سطحه الكلية 18 م^2 أوجد طول حرفه وهل ينتمي الى Q ؟

6 أي من الأعداد التالية تمثلة النقطة k علي خط الأعداد التالي



أ $\sqrt{81}$ ب $\sqrt{86}$

جـ $\sqrt{78}$ د $\sqrt{96}$

7 إذا كان x, y عددين صحيحين متتاليين فما قيمة $x+y$



أ 15 ب 11

جـ 17 د 13

8 مربع مساحته 29 سم^2 الى أي المجموعات الاتية يتنمي طول ضلعه ؟

أ Z ب N

جـ Q' د Q

9 مكعب حجمه 6 سم^2 فإن طول حرفه يتنمي الى ؟

أ Z ب N

جـ Q' د Q

ثانياً تطبيق المفاهيم

1 صنف كلاً من الأعداد الموجودة في الجدول الى نسبي وغير نسبي

17%	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$\sqrt[3]{-64}$	$\sqrt[3]{-27}$	$\frac{12}{31}$	0.323232
$\sqrt[3]{16}$	$\sqrt{6}$	$2\frac{2}{3}$	$0.\overline{6}$	$-\sqrt{121}$	0

2 أوجد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل عدد من الأعداد التالية ، وعين موقعه التقريبي علي خط الأعداد

أ $\sqrt{5}$ ب $\sqrt{13}$ جـ $\sqrt[3]{14}$ د $-\sqrt{11}$

الحل

3 أوجد في R مجموعة الحل لكل المعادلات الاتية

أ $x^3 - 11 = 5$

ب $2x^3 + 13 = 67$

جـ $\frac{2}{3}x^2 = \frac{4}{5}$

د $3x^2 - 1 = -13$

4 أوجد في Q' مجموعة الحل لكل المعادلات الاتية

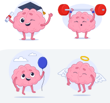
أ $2x^2 - 3 = 9$

ب $2(x^3 + 1) = 18$

جـ $6x^2 - 3 = 4x^2 + 7$

5 شكلت أمينة قطعة من الصلصال علي شكل مكعب مساحته 300 سم² أوجد طول حرفه ،وهل طول الحرف عدد نسبي ؟

6 أيهما أكبر: طول ضلع مربع مساحته 16 سم² أم طول قطر مربع مساحته 9 سم²



شغل دماغك 4

1 أوجد عدداً غير نسبي يقع بين العددين $0.\overline{6}, 0.\overline{3}$

2 إذا كان $11 < \sqrt{x} < 13, 10 < \sqrt{y} < 12$ حيث x, y عددان صحيحان موجبان

أوجد أكبر قيمة للمقدار $x - y$

الحل



الفترات والعمليات عليها

الفترات

هي مجموعة جزئية من R

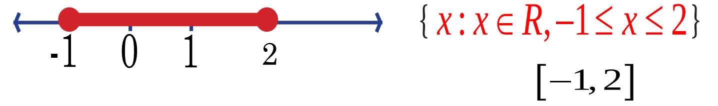
أولاً الفترات المحدودة

مثال 1 أكتب علي صورة فترة ثم مثل علي خط الأعداد كلا من

1. مغلقة

$\{x : x \in R, -1 \le x \le 2\}$

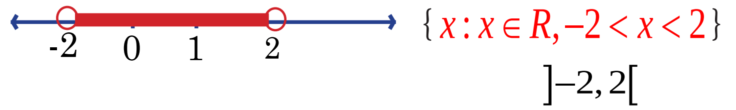
$[-1, 2]$



2. مفتوحة

$\{x : x \in R, -2 < x < 2\}$

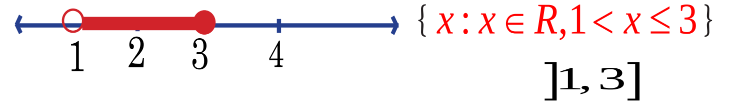
$]-2, 2[$



3. نصف مفتوحة أو نصف مغلقة

$\{x : x \in R, 1 < x \le 3\}$

$]1, 3]$



حاول بنفسك 1 أكتب علي صورة فترة ثم مثل علي خطط الأعداد كلا من

1. $\{x : x \in R, -1 < x < 5\}$

2. $\{x : x \in R, \sqrt[3]{-8} \le x \le \sqrt{9}\}$

3. $\{x : x \in R, -3 \le x < \sqrt{9}\}$

الفترات غير المحدودة

تمتد مجموعة الأعداد الحقيقية علي خط الأعداد الى الإتجاه الموجب الى مالانهاية (∞) وتمتد في الإتجاه السالب الى ما لا نهايه $(-\infty)$

يستخدم الرمزان (∞) أو $(-\infty)$ في التعبير عن المجموعات غير المحدودة

مثال 2 أكتب علي صورة فترة ثم مثل علي خطط الأعداد كلا من

1. $\{x : x \in R, x \ge -2\}$

$[-2, \infty[$



2. $\{x : x \in R, x < 1\}$

$]-\infty, 1[$



3. مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

$]0, \infty[$



4. مجموعة الأعداد الحقيقية الغير موجبه

$]-\infty, 0]$





لاحظ

$R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$

حاول بنفسك 2 اكتب علي صورة فترة ومثل علي خط الأعداد

1. $\{x : x \in R, X < 3\}$

2. $\{x : x \in R^{+}, x < 5\}$

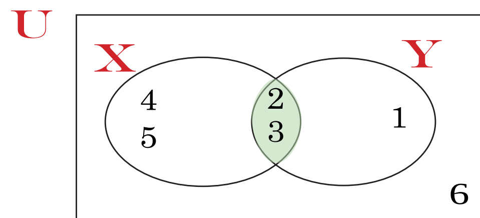
3. مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة

4. مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

العمليات على الفترات

الفترات هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ،ولذلك يمكن اجراء عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة عليها بنفس طريقة إجرائها علي المجموعات كالتالي

تمهيد من الشكل



العناصرالمشتركة $X \cap Y = \{2, 3\}$

جميع العناصر $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

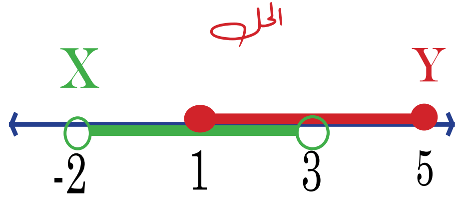
العناصر التي تنتمي الى X ولاتنتمي الى Y $X - Y = \{4, 5\}$

العناصر التي تنتمي الى U ولاتنتمي الىX $X` = \{1, 6\}$

مثال 3 إذا كان $X =]-2, 3[$ ، $Y = [1, 5]$

أوجد مستعيناً بخط الأعداد $X \cup Y$ ، $X \cap Y$ ، $X - Y$ ، $X`$

الحل



$X \cap Y = [1, 3[$

$X - Y =]-2, 1[$

$X \cup Y =]-2, 5]$

$X` = R -]-2, 3[=]-\infty, -2] \cup [3, \infty[$

حاول بنفسك 3 إذا كان $A = [-1, 5]$ ، $B = [0, 7[$

أوجد مستعيناً بخط الأعداد $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ ، $A`$

الحل

حاول بنفسك 4 أوجد مستعيناً بخط الأعداد

1. $[4, 9] \cap [7, 10[$

2. $]0, 5[-]3, 7]$

3. $]-3, 2[\cup]0, \infty[$

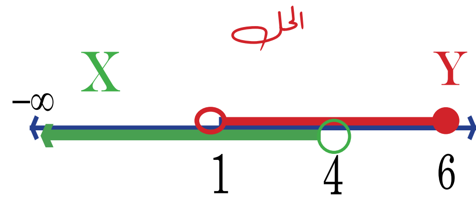
4. $X`$ حيث $X = [-5, \infty[$

مثال 4

إذا كان $Y =]1, 6]$ ، $X =]-\infty, 4[$

أوجد مستعيناً بخط الأعداد $X \cup Y$ ، $X \cap Y$ ، $X - Y$ ، X'

الحل



$X \cap Y =]1, 4[$ | $X \cup Y =]-\infty, 6]$

$X - Y =]-\infty, 1]$ | $X' = [4, \infty[$

حاول بنفسك 5

إذا كان $Y =]2,5]$ ، $X =]-\infty, 3[$

أوجد مستعيناً بخط الأعداد $X \cup Y$ ، $X \cap Y$ ، $X - Y$ ، X'

الحل

مثال 5

ضع في المربع الخالي رمزاً مناسباً من $\in$ أو $\notin$

(شفوي مع الطالب)

1. $\sqrt[3]{7}$ ☐ $]1, 2[$
2. $\sqrt{5}$ ☐ $]2, 3[$
3. -2 ☐ $]-2,1]$
4. 3 ☐ $]2, 4[$

حاول بنفسك 6

ضع في المربع الخالي رمزاً مناسباً من $\in$ أو $\notin$

1. $\sqrt[3]{13}$ ☐ $]3, 4[$
2. $\sqrt{11}$ ☐ $]2, 3[$
3. -3 ☐ $]-3,1]$
4. -1 ☐ $]-2,1]$

ملاحظات

1. $[3,5] - \{3,5\} =]3,5[$
2. $]2,4[\cup \{2\} = [2,4[$
3. $]1,2[\cup \{1,2\} = [1,2]$

أكمل

1. $[1,2] - \{1\} =$ ....
2. $]3,4[\cup \{4\} =$ ....
3. $R^+ \cap R^- =$ ....
4. $R^+ \cap]-3,2] =$ ....
5. $N \cap]-2,3[=$ ....



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 إذا كانت $a \in]2,5[$ فإن a يمكن أن تساوي أياً مما يلي ؟

أ 4 ب 1
جـ 5 د 2

2 إذا كانت $X =]-5,7[$ فأياً مما يلي صحيح ؟

أ $7 \in X$ ب $0 \notin X$
جـ $-5 \notin X$ د $-2 \in X$

3 إذا كانت $a \notin]-1,3[$ فإن a يمكن أن تساوي أياً مما يلي ؟

أ 0 ب -1
جـ 2 د 3

4 مالفترة الناتجة عن $]2,5[\cup \{2\}$ ؟

أ $]2,5[$ ب $[2,5[$
جـ $[2,5]$ د $]2,5]$

5 أي الفترات ينتمي اليها العدد $-\sqrt{7}$ ؟

أ $[-2,-1]$ ب $[-3,-2]$
جـ $[-4,-3]$ د $[-7,-6]$

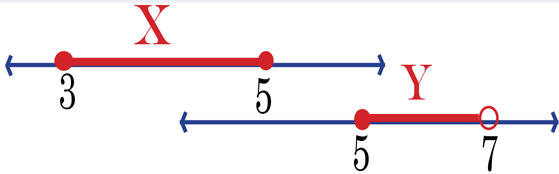
6 $R - R^{+} = ...$

أ $R^{`}$ ب $]-\infty,0[$
جـ $\{0\}$ د $]-\infty,0]$

7 $[1,3]-]1,3[= .....$

أ Φ ب $\{1,3\}$
جـ $\{1\}$ د $]1,3[$

8 أي مما يلي يمثل $X \cap Y$



أ Φ ب $[3,5[$
جـ $\{5\}$ د $[3,7[$

ثانياً تطبيق المفاهيم

1 إذا كان $A =]-\infty,1], B =]-2,7]$

أوجد $A \cup B$، $A \cap B$، $A - B$، $A^{`}$

2 أوجد كلاً مما يأتي

أ $[2,5[\cup]-2,3]$

2) $[2,7]-[3,8[$

3) $]-1,3[\cap]-5,1]$

4) $[4,8['$

5) $[3,\infty[\cap]-\infty,7[$

6) $]2,5]\cup[5,\infty[$

7) $R\cap[2,5[$

8) $R^{+}\cup]0,2]$

9) $R^{-}-[-2,0[$

10) $R^{-}\cup R^{+}$

11) $N\cap[2,5[$

12) $Z^{+}\cap]-1,2]$

13) $Z^{-}\cap]-2,3]$

14) $\{3,5\}\cup]3,5[$

15) $\{3,7\}\cap[3,7[$

تمارين

أكمل

1) $]1,3[\cup\{3\}=$ ....

2) $]1,5[\cup\{1,5\}=$ ....

3) $R^{+}\cap R'=$ ....

4) $Z^{+}\cap]-2,1]=$ ....

5) $N\cap]-2,1[=$ ....

6) $\sqrt{5}$ ...... $]1,2[$



العمليات على الأعداد الحقيقية

الحدود الجذرية المتشابهة

هي حدود تحتوى على نفس دليل الجذر ونفس المجذور

$2\sqrt[3]{5}$

المجذور 5
دليل الجذر 3
معامل الجذر 2

أمثلة

1. لحدود جذرية متشابهة

$4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{5}, -3\sqrt[3]{5}$

2. لحدود جذرية غيرمتشابهة

$2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$

$2\sqrt{5}, 3\sqrt[3]{5}$

العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً الجمع والطرح

(بنجمع ونطرح المعاملات)

أمثلة

1. $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$
2. $-3\sqrt{7}+5\sqrt{7}=2\sqrt{7}$

حاول بنفسك 1

أكمل

1. $4\sqrt{6}+3\sqrt{6}=$ ....
2. $7\sqrt{2}+10\sqrt{2}=$ ....

مثال 1

اختصر

$2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

الحل

$2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$6\sqrt{5}+\sqrt{2}$

حاول بنفسك 2

1. $\sqrt{3}+2\sqrt{5}+4\sqrt{3}-4\sqrt{5}$

الحل

2. $\sqrt[3]{5}+2\sqrt{5}+3\sqrt[3]{5}-4\sqrt{5}$

الحل

ثانياً الضرب والقسمة

لاحظ

إذا كانت $X \geq 0$ فإن $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$

إذا كانت $x \in R$ فإن $\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x$

أمثلة

1. $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$
2. $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=2\times3=6$
3. $\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=2$
4. $\frac{-6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-6$

حاول بنفسك 3

1. $\sqrt{7}\times\sqrt{7}=$ ....
2. $2\sqrt{11}\times\sqrt{11}=$ ....
3. $5\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=$ ....
4. $\frac{12\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=$ ....

مثال 2

اكتب كلاً من الأعداد في أبسط صورة بحيث يكون المقام عدداً صحيحا

1. $\frac{7}{\sqrt{3}}$

بضرب كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{-15}{\sqrt{5}}$

بضرب كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{5}$

$\therefore \frac{-15}{\sqrt{5}}=\frac{-15}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{-15\sqrt{5}}{5}=-3\sqrt{5}$

3 $\frac{12}{5\sqrt{2}}$

بضرب كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{12}{5\sqrt{2}} = \frac{12}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5\times 2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

حاول بنفسك 4

اكتب كلاً من الأعداد في أبسط صورة بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً

1 $\frac{6}{\sqrt{3}}$

2 $\frac{-5}{\sqrt{2}}$

خواص العمليات علي الأعداد الحقيقية

إذا كانت a،b،c ثلاثة أعداد حقيقية ،فإن

الخاصية	عملية الجمع	عملية الضرب
الإنغلاق	$a+b\in R$	$a\times b\in R$
الإبدال	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
(الدمج) التجميع	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
توزيع الضرب علي الجمع	$a(b+c)=ab+ac$	
المحايد	المحايد الجمعي هو 0 $a+0=0+a=a$	المحايد الضربي هو 1 $a\times1=1\times a=a$
المعكوس	المعكوس الجمعي للعدد a هو $(-a)$ حيث $a+(-a)=0$	المعكوس الجمعي للعدد a هو $\frac{1}{a}$ حيث $a\neq 0$ حيث $a\times\frac{1}{a}=1$

مثال 3

أوجد ناتج كلاً مما يأتى في أبسط صورة

1 $2\sqrt{3}\left(4+\sqrt{3}\right)-4\sqrt{3}$

$8\sqrt{3}+6-4\sqrt{3}$

$=6+4\sqrt{3}$

2 $\left(\sqrt{7}-1\right)\left(2\sqrt{7}+3\right)$

$14+3\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

$=11+\sqrt{7}$

حاول بنفسك 5

أوجد ناتج كلاً مما يأتى في أبسط صورة

1 $2\sqrt{5}\left(3+\sqrt{5}\right)-2\sqrt{5}$

2 $\left(\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-4\right)$



تذكر

$.(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

$.(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$.(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

مثال 4 أوجد ناتج كلاً مما يأتي في أبسط صورة

1) $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$

$8-1=7$

2) $(2\sqrt{5}-5)^2$

$20-20\sqrt{5}+25=45-20\sqrt{5}$

حاول بنفسك 6 أوجد ناتج كلاً مما يأتي في أبسط صورة

1) $(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)$

2) $(\sqrt{5}+3)^2$

مثال 5 اختصر لأبسط صورة

$(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

الحل

$5+4\sqrt{5}+4+5-4$

$=10+4\sqrt{5}$

حاول بنفسك 7 اختصر لأبسط صورة

$(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

الحل



لاحظ العددان $-\sqrt{a},\sqrt{a}$ معكوسان جمعيان

مثال 6 (شفوي مع الطالب)

العدد	$\sqrt{5}$	$-3\sqrt{2}$	$3-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{5}$
المعكوس الجمعي				



لاحظ المعكوس الضربي للعدد a هو $\frac{1}{a}$ حيث $a \neq 0$

مثال 7 (شفوي مع الطالب)

العدد	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$
المعكوس الضربي				



لاحظ لجعل العدد $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ في أبسط صورة اضرب كلاً من البسط والمقام في $2+\sqrt{3}$

مثال

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

مثال 8 اختصر لأبسط صورة

1) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

الحل

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$=2(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

$=2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

2 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

الحل

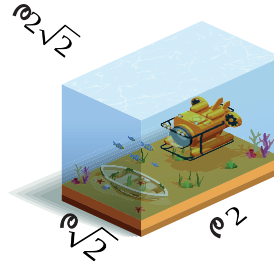
$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}=\sqrt{5}-2$$

حاول بنفسك 8 اختصر لأبسط صورة

1 $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

2 $\dfrac{1}{\sqrt{11}-3}$

مثال 8 في الشكل المقابل



حوض زجاجي مغطي علي شكل متوازي مستطيلات لعرض الأسماك، أوجد

1 حجم الحوض الزجاجي

2 المساحة الكلية للحوض لأقرب م^2

الحل

1 حجم الحوض (v) = الطول × العرض × الإرتفاع

$$\therefore v=2\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=4\times2=8$$

حجم الحوض = 8 م^3

2 المساحة الكلية (A) =

2 (الطول × العرض + الطول × الارتفاع + العرض × الارتفاع)

$$=2\left(2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}\right)=2(6\sqrt{2}+4)=12\sqrt{2}+8\approx24.97$$

المساحة الكلية (A) = 25 م^2

حاول بنفسك 9 أوجد مساحة كل من الأشكال الاتية في ابسط صورة

1 الشكل مربع



$2\sqrt{5}$ سم

الحل

2

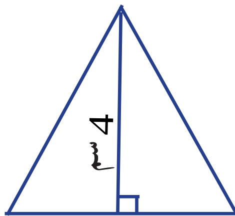


$(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$ سم

$(2\sqrt{5}+\sqrt{3})$ سم

الحل

3



$(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ سم

الحل



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 إذا كان $a+\sqrt{5}=0$ فما قيمة a ؟

أ 0 ب $\frac{1}{\sqrt{5}}$
جـ $-\sqrt{5}$ د $\sqrt{5}$

2 إذا كان $a\times\sqrt{2}=1$ فما قيمة a ؟

أ $\sqrt{2}$ ب $\frac{\sqrt{2}}{2}$
جـ $-\sqrt{2}$ د 1

ما قيمة $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ ؟

أ $2\sqrt{3}$ ب $\sqrt{3}$
جـ $\sqrt{6}$ د 3

4 إذا كان $a\sqrt{5}-4\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ فما قيمة a ؟

أ $a=-1$ ب $a=7$
جـ $a=1$ د $a=10$

5 إذا كان $(2\sqrt{3})^{n}=12$ فإن

أ $n=2$ ب $n=4$
جـ $n=3$ د $n=6$

6 إذا كان $\sqrt[3]{5}+3a=4\sqrt[3]{5}$ فإن

أ $a=1$ ب $a=\sqrt{5}$
جـ $a=\sqrt[3]{5}$ د $a=5$

7 ماالمعكوس الجمعي للعدد $\frac{7}{\sqrt{7}}$ في أبسط صورة

أ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ب -7
جـ 7 د $\sqrt{7}$

8 ماالمعكوس الضربي للعدد $\sqrt{3}-2$

أ $-\sqrt{3}-2$ ب $\sqrt{3}+2$
جـ $2-\sqrt{3}$ د $\sqrt{3}-2$

ثانياً تطبيق المفاهيم

2 اجعل المقام في كل مما يأتي عددا صحيحاً، واكتب العدد في أبسط صورة

1 $\frac{30}{\sqrt{10}}$

2 $\frac{10}{2\sqrt{5}}$

3 $\frac{1}{2+\sqrt{6}}$

4 $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

3 أوجد ناتج كلاً مما يأتي في أبسط صورة

1 $2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}$

الحل

2 $2\sqrt{5}-3\sqrt[3]{2}+4\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$

الحل

3 $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3}\times 2\sqrt{3}$

الحل

4 $\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)-2\left(1+\sqrt{5}\right)$

الحل

5 $\left(\sqrt{7}-1\right)^{2}+\left(\sqrt{7}+3\right)\left(\sqrt{7}-3\right)$

الحل

6 $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2}-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)$

الحل

4 أوجد مساحة كل من الأشكال الاتية في أبسط صورة

1 الشكل مربع



$2\sqrt{3}$ سم

الحل

2

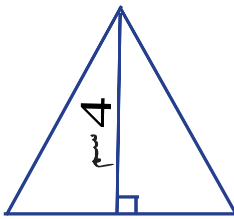


$\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ سم

$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ سم

الحل

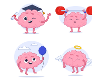
3



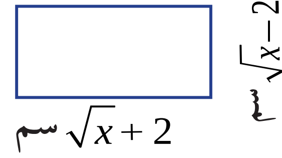
$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ سم

الحل

شغل دماغك 1



1



إذاكان مساحة المستطيل = 5 م² أوجد بعديه ومحيطه

2 إذاكان

$a=\sqrt{11}-3, b=\sqrt{11}+3$ أثبت أن $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=20$

3 $\left(\sqrt{11}-3\right)^2+\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)$

4 $3\sqrt[3]{2}+1+4\sqrt[3]{2}-5$

5 $\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^2$

6 $2\sqrt{11}+3\sqrt{2}-5\sqrt{11}+4\sqrt{2}$

7 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\sqrt{7}-\sqrt{6}$



قوانين الجذور التربيعية والتكعيبية

أولاً ضرب وقسمة الجذور التربيعية

إذا كان a,b عددين حقيقين **موجبين** فإن

1. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

مثال

$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ بشرط $b\neq 0$

مثال

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$

مثال 1 ضع في أبسط صورة كلاً من الأعداد التالية

1. $\sqrt{32}$

$\sqrt{2\times 16}=4\sqrt{2}$

2. $\sqrt{24}$

$\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$

3. $2\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\sqrt{\frac{5\times 4}{2}}=\sqrt{10}$

4. $3\sqrt[3]{\frac{-2}{3}}$

$\sqrt[3]{\frac{-2\times 27}{3}}=\sqrt[3]{-18}$

حاول بنفسك 1 ضع في أبسط صورة كلاً من الأعداد التالية

1. $\sqrt{50}$

2. $4\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. $2\sqrt{12}$

4. $3\sqrt{\frac{2}{3}}$

مثال 2 اختصر لأبسط صورة

$\sqrt{12}-3\sqrt{\frac{\ }{3}}+\sqrt{27}$

الحل

$\sqrt{3\times 4}-\sqrt{\frac{9\times 1}{3}}+\sqrt{3\times 9}$

$2\sqrt{3}-\sqrt{3}+3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

حاول بنفسك 2 اختصر لأبسط صورة

1. $\sqrt{8}+2\sqrt{\frac{\ }{2}}-\sqrt{18}$

2. $\sqrt{50}-\frac{15}{\sqrt{5}}+2\sqrt{5}$

مثال 3

إذا كانت $x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ، $y=\frac{3}{x}$ فأوجد في أبسط صورة

1. $x-y$
2. $\frac{y}{x}$

الحل

$$y=\frac{3}{x}=\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$x-y=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}{5-2}=\frac{5-2\sqrt{10}+2}{3}=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

حاول بنفسك 3

إذا كان $x=\sqrt{7}+\sqrt{6}$ ، $y=\frac{1}{x}$

فأوجد في أبسط صورة

1. $\frac{x+y}{xy}$
2. x^2+y^2

الحل

مثال 3

إذا كان $x\sqrt{8}=3\sqrt{18}-\sqrt{50}$ أوجد قيمة x

الحل

$$x\sqrt{2\times4}=3\sqrt{2\times9}-\sqrt{2\times25}$$

$$2x\sqrt{2}=9\sqrt{2}-5\sqrt{2}$$

$$2x\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$\therefore 2x=4$$

$$\therefore x=2$$

حاول بنفسك 4

إذا كان $x\sqrt{20}=\sqrt{45}+7\sqrt{5}$ أوجد قيمة x

الحل

ثانياً ضرب وقسمة الجذور التكعيبية

إذا كان a,b عددين حقيقين فإن

1. $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\times b}$

مثال

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{-4}=\sqrt[3]{3\times(-4)}=\sqrt[3]{-12}$$

2. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ بشرط $b\neq0$

مثال

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$$

مثال 4 ضع في أبسط صورة كلاً من الأعداد التالية

1. $\sqrt[3]{24}$

$$\sqrt[3]{3\times8}=2\sqrt[3]{3}$$

2. $3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1\times27}{9}}=\sqrt[3]{3}$$

3. $\sqrt[3]{16}$

$$\sqrt[3]{2\times8}=2\sqrt[3]{2}$$

حاول بنفسك 5 ضع في أبسط صورة كلاً من الأعداد التالية

1. $\sqrt[3]{54}$
2. $3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$
3. $\sqrt[3]{81}$

مثال 5

ضع في أبسط صورة

$$\frac{\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$$

الحل

$$\frac{\sqrt[3]{5\times8}-2\sqrt[3]{5\times27}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$=-\frac{4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=-4$$

حاول بنفسك 6

ضع في أبسط صورة

$$\frac{2\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$$

الحل



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1) أي مما يلي صحيح؟

أ) $\sqrt{40}=4\sqrt{10}$ ب) $\sqrt{38}=8\sqrt{2}$

جـ) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ د) $\sqrt{48}=3\sqrt{6}$

2) أي مما يلي يكافئ $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}$

أ) $\sqrt[3]{30}$ ب) $5\sqrt[3]{5}$

جـ) 5 د) 125

3) أي مما يلي يكافئ $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{15}}$

أ) $\frac{5}{15}$ ب) $\frac{5}{3}$

جـ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ د) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

4) ماقيمة $\sqrt{18}+\sqrt{32}$

أ) $\sqrt{50}$ ب) $7\sqrt{2}$

جـ) $7\sqrt{4}$ د) $5\sqrt{4}$

5) أي مما يلي يكافئ $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

أ) $2\sqrt{6}$ ب) $6\sqrt{2}$

جـ) 6 د) $\sqrt{70}$

6 إذا كان $\sqrt{160} = x\sqrt{10}$ فإن قيمة x

أ 8 ب 3

جـ 4 د 6

7 إذا كان $x + \sqrt{28} = \sqrt{7}$ فإن قيمة x

أ $\sqrt{21}$ ب $-\sqrt{21}$

جـ $\sqrt{7}$ د $-\sqrt{7}$

8 إذا كان $a\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{10}$ فإن قيمة a

أ 30 ب $\sqrt[3]{30}$

جـ 15 د $\sqrt[3]{15}$

9 إذا كان $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$ فإن قيمة a

أ $\sqrt{3}$ ب 9

جـ 3 د $\sqrt{6}$

10 إذا كان $2\sqrt{3} \times 4a = 8\sqrt{6}$ فإن قيمة a

أ $\sqrt{6}$ ب $\sqrt{2}$

جـ 2 د $\sqrt{3}$

ثانياً تطبيق المفاهيم

اجب عن الأسئلة الاتية

1 إذا كانت $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ، $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

فأوجد في أبسط صورة

أ $x \times y$ ب $\frac{x}{y}$ جـ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

2 إذا كانت $a = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$ ، $b = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$

فأوجد في أبسط صورة

أ $(a+b)^3$ ب $(a-b)^3$

3 مستطيل بعداه $\sqrt{12}$ و $\sqrt{48}$ ومساحته = مساحة مربع

أوجد طول ضلع المربع



قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية

الضرب المتكرر في مجموعة الأعداد الحقيقية

يستخدم التعبير الرياضي a^n
للتعبير عن حاصل ضرب العدد الحقيقي a في نفسه n من المرات

$$\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{عدد حقيقي مكرر } n \text{ مره}} = a^n$$

n ← الأس، a ← الأساس

مثال

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^5$$

5 ← الأس، $\sqrt{2}$ ← الأساس

لاحظ



$(-a)^n = a^n$ إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً

$(-a)^n = -a^n$ إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً

مثال 1 أوجد قيمة كلاً مما يأتي

1) $\left(-\sqrt{5}\right)^4$ 2) $-\left(\sqrt{5}\right)^4$ 3) $\left(-\sqrt{5}\right)^3$

الحل

1) $\left(-\sqrt{5}\right)^4 = -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} = 5 \times 5 = 5^2 = 25$.

2) $-\left(\sqrt{5}\right)^4 = -\left(\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}\right) = -(5)^2 = -25$.

3) $\left(-\sqrt{5}\right)^3 = -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} = 5 \times -\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$.

حاول بنفسك 1 أوجد قيمة كلاً مما يأتي

1) $\left(-\sqrt{2}\right)^4$ 2) $-\left(\sqrt{2}\right)^5$ 3) $-\left(\sqrt{2}\right)^6$

الحل

الأس الصفرى

أي عدد حقيقي لايساوي صفر مرفوع للأس صفر يساوي 1

أي أن $a^0 = 1$ حيث a عدد حقيقي لايساوي صفر

مثال

$\left(-\sqrt[3]{4}\right)^0 = 1$ $\left(\sqrt{3}\right)^0 = 1$ $5^0 = 1$

حاول بنفسك 2 اختر

1) $(5a)^0 = \ldots\ldots\ldots$ حيث $a \neq 0$

أ) 0 ب) 5 جـ) 1 د) 15

2) $5a^0 = \ldots\ldots\ldots$ حيث $a \neq 0$

أ) 0 ب) 5 جـ) 1 د) 15

الأس السالب

أي عدد حقيقي لايساوي صفر مرفوع للأس $(-n)$ حيث n عدد صحيح يساوي المعكوس الضربي للعدد نفسه مرفوع للأس n

أي أن $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ حيث a عدد حقيقي لايساوي صفر

مثال

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-3} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$ | $\left(\sqrt{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^4} = \frac{1}{9}$

حاول بنفسك 3 أوجد ناتج

1) $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$ 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$ 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-3}$

الحل

قوانين الأسس فى الأعداد الحقيقية

قوانين الضرب

عندضرب القوى التي لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونجمع الأسس

أي أن $a^m \times a^n = a^{m+n}$ حيث a عدد حقيقي لايساوي صفر

حيث m و n عددان صحيحان

مثال

$a^{-3} \times a^5 = a^{-3+5} = a^2$ | $2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$

حاول بنفسك 4 أوجد ناتج

1) $3^2 \times 3^6$ 2) $\left(\sqrt{5}\right)^{-6} \times \left(\sqrt{5}\right)^4$ 3) $a^2 \times a^3 \times a$

الحل

قوانين الضرب

عند إيجاد حاصل ضرب عددين يوزع الأس علي كل من العددين

أي أن $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ حيث b و a عددان حقيقيان لا يساويان صفر

حيث n عدد صحيح

مثال

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 \times 2 = 18$$

حاول بنفسك 5 أوجد ناتج

1) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$ 2) $\left(2\sqrt{3}\right)^4$

الحل

قوانين القسمة

عند قسمة القوي التي لها نفس الأساس نحتفظ بالأساس ونطرح الأسس

أي أن $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ حيث a عدد حقيقي لايساوي صفر

حيث m و n عددان صحيحان

مثال

$$\frac{(\sqrt{2})^6}{(\sqrt{2})^8} = (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{7})^5}{(\sqrt[3]{7})^2} = (\sqrt[3]{7})^{5-2} = (\sqrt[3]{7})^3 = 7$$

حاول بنفسك 6 أوجد ناتج

1) $\frac{(\sqrt{5})^7}{(\sqrt{5})^2}$

2) $\frac{a^3 \times a^7}{a^8}$

الحل

لاحظ



عند إيجاد قوة خارج قسمة عددين يوزع الأس علي كل من العددين

أي أن $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ حيث b و a عددان حقيقيان لا يساويان صفر حيث n عدد صحيح

مثال

$$\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{6^2}{\sqrt{3}^2} = \frac{36}{3} = 12$$

حاول بنفسك 7 أوجد ناتج

1) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2$

الحل

مثال 2 أوجد قيمة كلاً مما يأتي

1) $\frac{(\sqrt{5})^3 \times (\sqrt{5})^7}{(\sqrt{5})^8}$

2) $\frac{(\sqrt{8})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5}$

الحل

1) $\frac{(\sqrt{5})^{10}}{(\sqrt{5})^8} = (\sqrt{5})^2 = 5$

الحل

2) $\frac{(2\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2})^5} = \frac{2^4 \times (\sqrt{2})^7}{2^5 \times (\sqrt{2})^5}$

$= 2^{-1} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

حاول بنفسك 8 أوجد ناتج

1) $\frac{(\sqrt{3})^7 \times (\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3})^8}$

2) $\frac{(\sqrt{18})^5 \times (\sqrt{2})^3}{(\sqrt{12})^4}$

الحل

الحل

مثال 3 — اختصر لأبسط صورة

1) $\dfrac{2^{n+3}\times 5^{n}}{(10)^{n}}$ 2) $\dfrac{(12)^{n}}{3^{n}\times 4^{n-1}}$

الحل

1) $\dfrac{2^{n+3}\times 5^{n}}{2^{n}\times 5^{n}} = 2^{n+3-n} = 2^{3} = 8$

2) $\dfrac{3^{n}\times 4^{n}}{3^{n}\times 4^{n-1}} = 4^{n-n+1} = 4$

حاول بنفسك 9 — اختصر لأبسط صورة

1) $\dfrac{3^{n+2}\times 7^{n}}{(21)^{n}}$ 2) $\dfrac{(18)^{n}}{2^{n-2}\times 9^{n}}$

الحل

الحل

مثال 4 — اختصر لأبسط صورة

$$\frac{(10)^{2n}\times 0.001}{(10)^{-n}\times(100)}$$

ثم أوجد الناتج عندما $n=2$

الحل

$$\frac{(10)^{2n}\times(10)^{-3}}{(10)^{-n}\times(10)^{2}} = \frac{(10)^{2n-3}}{(10)^{-n+2}}$$

$$=(10)^{3n-5} = (10)^{6-5} = 10$$

حاول بنفسك 10 — اختصر لأبسط صورة

$$\frac{(10)^{3n}\times 0.01}{(10)^{n}\times 1000}$$

ثم أوجد الناتج عندما $n=2$

الحل

أفكار مميزة

إذا كان $3^{x}=2$ أوجد قيمة

1) 9^{x} 2) 3^{x+1} 3) 3^{x-2}

الحل

1) $9^{x} = 3^{x}\times 3^{x} = 2\times 2 = 4$

2) $3^{x+1} = 3^{x}\times 3^{1} = 2\times 3 = 6$

3) $3^{x-2} = 3^{x}\times 3^{-2} = 2\times\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

حاول بنفسك 11 — إذا كان $5^{x}=3$ أوجد قيمة

1) 125^{x} 2) 5^{x+1} 3) 5^{x-1}

الحل

شغل دماغك 1



إذا كان $2^{x}=3$ و $2^{y}=5$ أوجد قيمة

1) 2^{x+y} 2) 2^{x-y} 3) 2^{x+y-2}



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 ماناتج $\frac{(ab)^3}{b^3}$

أ a^3 ب $\frac{a}{b}$ جـ $\frac{a^3}{b^2}$ د $\frac{a^2}{b^3}$

2 ماناتج $\frac{7}{(\sqrt{7})^0} - \left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^0$

أ 0 ب 6 جـ 1 د -6

3 ماناتج $(\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^{-4}$

أ $\sqrt{3}$ ب $\frac{1}{3}$ جـ 3 د $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 ماناتج $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-1}$

أ $\frac{5}{\sqrt{10}}$ ب $5\sqrt{2}$ جـ $2\sqrt{5}$ د 2

5 ما محيط المربع الذي مساحته a سم^2

أ $4a$ سم ب $(\sqrt{a})^4$ سم جـ $4\sqrt{a}$ سم د a^4 سم

6 ماقيمة $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$

أ 4^2 ب 4^8 جـ 4^3 د 4^{16}

7 إذا كان $2^{x-1} = 1$ فماقيمة X

أ 0 ب -2 جـ 1 د -1

8 إذا كان $(\sqrt{6})^x \times \sqrt{6} = 1$ فماقيمة X

أ 0 ب -2 جـ 1 د -1

9 ما العدد $\frac{1}{5}$ $(\sqrt[3]{5})^6$

أ 5 ب $\sqrt[3]{5}$ جـ 25 د $(\sqrt[3]{5})^8$

10 إذا كان $2^x = 3$ فماقيمة 2^{x+1}

أ 4 ب 5 جـ 6 د 9

ثانياً تطبيق المفاهيم

اختصر كلاً مما يأتي لأبسط صورة

1 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^4$

2) $\dfrac{(\sqrt{3})^{3} \times 27}{(\sqrt{3})^{5} \times (\sqrt{3})^{4}}$

5) $\dfrac{(27)^{n+1}}{(3)^{n-1} \times (9)^{n+1}}$

3) $\dfrac{(\sqrt{18})^{2} \times (\sqrt{2})^{-1}}{(\sqrt{8})^{-1}}$

6) $\dfrac{(2)^{2n+1} \times (3)^{2n+1}}{(6)^{2n}}$

4) $\dfrac{2^{n} \times 6^{n+1}}{12^{n}}$

7) $\dfrac{(\sqrt{6})^{n+2} \times (\sqrt{3})^{n}}{4 \times (\sqrt{2})^{n-2}}$ ثم أوجد الناتج عندما $n = 1$

8) $\frac{(10)^{-n}\times 0.01}{(10)^{-n-6}\times(10)^{n}}$ ثم أوجد الناتج عندما $n=3$

9) إذا كان $x=\sqrt{2}$ و $y=\sqrt{6}$ فما قيمة $\frac{y^{6}x^{-4}}{x^{2}}$

10) إذا كان $x=2\sqrt{3}$ و $y=3\sqrt{2}$ فما قيمة $\left(x^{2}-y^{2}\right)^{-1}$

11) إذا كان $2^{x}=5$ فما قيمة

أ) 2^{x+1} ب) 2^{1-x} جـ) $2^{x+2}+2^{x+3}$

12) إذا كان $x=\sqrt{5}$ و $y=5$ فما قيمة $x^{-10}\times y^{10}$



تمارين علي الوحدة الأولي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1) إذا كانت $a = 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ فما قيمة a

أ) -1 ب) 1 ج) 0 د) $\sqrt[3]{2}$

2) إذا كان $\left(\sqrt{2}\right)^{x-1} = \sqrt{3}$ فما قيمة $\left(\sqrt{2}\right)^{x}$

أ) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt{6}$ د) $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

3) مالفترة التي تمثل $R^{-} \cap]-2,3]$

أ) $]-2,0[$ ب) $]-2,0]$ ج) $]-2,1]$ د) $]0,3]$

4) أي من الأعداد الاتية غير نسبي

أ) $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ب) $\sqrt[3]{-27}$ ج) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ د) $0.\bar{5}$

5) العدد الغير نسبي المحصور بين $4, 3$ هو

أ) 3.5 ب) $\sqrt{7}$ ج) $\frac{1}{7}$ د) $\sqrt{10}$

6) $\frac{1}{2}\sqrt{8} = ...$

أ) $\sqrt{2}$ ب) 2 ج) 4 د) $2\sqrt{2}$

7) المعكوس الضربي للعدد $2+\sqrt{3}$ هو

أ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ب) $2-\sqrt{3}$ ج) $2+\sqrt{3}$ د) $-2\sqrt{6}$

8) $Q \cup Q' = ...$

أ) Φ ب) $\{0\}$ ج) Q د) R

9) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{3}}{6}$ هو

أ) $2\sqrt{3}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) 8 د) 6

10) إذا كانت $\sqrt{x} + \sqrt{18} = 4\sqrt{2}$ فإن x تساوي

أ) 2 ب) $\sqrt{2}$ ج) 3 د) 0

11) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{5}}{10}$ هو

أ) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ب) $2\sqrt{5}$ ج) $\frac{-\sqrt{5}}{10}$ د) $-2\sqrt{5}$

12 العدد $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^8$ هو

أ) 2^5 ب) $2\sqrt{2}$

جـ) 8 د) 4

13 حجم متوازي مستطيلات أبعاده $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}$ هو سم^3

أ) $\sqrt{2}$ ب) 11

جـ) $\sqrt{6}$ د) 6

14 $[2,7]-\{2,7\}=......$

أ) $[2,7]$ ب) $\{2\}$

جـ) Φ د) $]2,7[$

15 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=.......$

أ) $\sqrt[3]{4}$ ب) $\sqrt[3]{2}$

جـ) $\sqrt[3]{8}$ د) $\sqrt[3]{16}$

16 مستطيل بعداه $\left(\sqrt{7}-1\right),\left(\sqrt{7}+1\right)$ تكون مساحة سطحه سم^2

أ) 8 ب) 6

جـ) 7 د) $2\sqrt{7}$

17 إذا كانت $\left(\sqrt{3}\right)^x=3$ و $\left(\sqrt{5}\right)^{x+y}=25$ فإن $\frac{x}{y}=......$

أ) 1 ب) -1

جـ) 3 د) -3

18 إذا كان $3^x=4$ فإن $3^{x-1}=....$

أ) $\frac{4}{3}$ ب) 1

جـ) $\frac{3}{4}$ د) 0

19 إذا كان $\left(\sqrt{2}\right)^x=8$ فإن $x=....$

أ) 3 ب) 6

جـ) 4 د) 5

20 إذا كان $2^x=5$ فإن $2^{x+1}=....$

أ) 2 ب) 10

جـ) 5 د) 25

21 $\left(\sqrt{3}\right)^{-5}\times\left(\sqrt{3}\right)^9=....$

أ) 9 ب) $3\sqrt{3}$

جـ) 3 د) $\sqrt{3^3}$

22 إذا كان $2^{x-3}=1$ فإن $\left(\sqrt[3]{5}\right)^x=.....$

أ) 5 ب) $\sqrt{5}$

جـ) $\sqrt[3]{5}$ د) $5\sqrt{5}$

23 إذا كان n عدداً صحيحاً $n+1>\sqrt{29}>n$ فإن $n=.....$

أ 4 ب 5

ج 3 د 6

24 إذا كان $X=]-1,\infty[$ فإن الفترة التي تعبر عن مكملة X تساوي

أ $]-\infty,-1[$ ب $]-\infty,1[$

ج $]1,\infty[$ د $]-\infty,-1]$

اختصر الآتي

1 $2\sqrt{20}-2\sqrt{45}+4\sqrt{80}$

2 $\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{50}$

3 $\sqrt{75}-\sqrt{27}-3\sqrt{\frac{1}{3}}$

4 $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}$

5 $2\sqrt{24}-\sqrt[3]{24}+\sqrt{54}+6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

8 إذا كان $x=\frac{4}{3+\sqrt{5}}, y=3+\sqrt{5}$ أوجد قيمة x^2+y^2

9 إذا كان $x=\sqrt{7}+\sqrt{5}, y=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ أوجد قيمة $(x+y)^2$

10 إذا كان $X=[-2,3], Y=[1,5]$

أوجد قيمة أ $X-Y$ ب $X\cap Y$ ج $X\cup Y$

11 إذا كان $X=]-\infty,3], Y=[-2,5]$

أوجد قيمة أ $X-Y$ ب $X\cap Y$ ج $X\cup Y$

12 إذا كان $x=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ أوجد في أبسط صورة $x-\frac{1}{x}$

اختصر الآتي

1 $\frac{(\sqrt{3})^{n+1}\times(\sqrt{5})^{n}}{(\sqrt{15})^{n}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n=4$

2) $\frac{(\sqrt{2})^{n+1} \times (\sqrt{3})^{n+1}}{(\sqrt{6})^{n}}$

3) $\frac{(\sqrt{15})^{n-2} \times (\sqrt{6})^{n}}{2 \times (\sqrt{10})^{n-2}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 1$

4) اختصر المقدار $\frac{(\sqrt{3})^{2n+3}}{(\sqrt{2})^{1-n} \times (\sqrt{6})^{n-1}}$ ثم أوجد القيمة العددية للناتج عند $n = 0$



الوحدة الثانية

الدرس الأول	التحليل بإخراج العامل المشترك
الدرس الثاني	تحليل ثلاثية الجذور
الدرس الثالث	تحليل الحالات الخاصة
الدرس الرابع	التحليل بالتقسيم



التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

كثيرة الحدود هي تعبير رياضي فيه جميع أسس متغيراته أعداد صحيحة موجبة

كثيرة حدود (وحيدة الحد). $-3xy$
كثيرة حدود (ثنائية الحدود). $4xy^2 + 2x$
كثيرة حدود (ثلاثية الحدود). $2x^2 + 3y + 8$

كيفية تحليل كثيرة حدود بإخراج العامل المشترك الأكبر

مثال 1 حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) $8x^2 - 16$

الحل

العامل المشترك الأكبر هو 8

$$= 8(x^2 - 2)$$

2) $15x^2y^2 - 30xy^3$

الحل

العامل المشترك الأكبر هو $15xy^2$

لاحظ بتاخد العامل المشترك بأصغر أس

$$= 15xy^2(x - 2y)$$

3) $6x^3 - 9x^2$

الحل

$$= 3x^2(2x - 3)$$

4) $12a^3 - 9a^2 + 3a$

الحل

$$= 3a(4a^2 - 3a + 1)$$

حاول بنفسك 1 حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) $12x^2 + 16x$

2) $6a^4 - 5a^2$

3) $8x^3 - 8x^2 + 12x$

4) $36ab - 24a^2b + 12ab^2$

لاحظ

إذا كان معامل الحد الأول في كثيرة الحدود سالباً فيفضل أخذ (-1) عاملاً مشتركاً من كل حد من حدود كثيرة الحدود

فمثلاً $-a + b - c = -(a - b + c)$

مثال 2 أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) $19 \times 23 + 19 \times 27$

الحل

$$= 19(23 + 27)$$

$$19 \times 50 = 950$$

2) $37\times163-37\times26-(37)^2$

الحل

$$37\times(163-26-37)$$

$$37\times100=3700$$

حاول بنفسك 2

أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي باستخدام التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) $83\times57+83\times43$

2) $43\times87-43\times30+(43)^2$

مثال 3

حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) $12x(x+y)-18y(x+y)$

الحل

$$6(x+y)(2x-3y)$$

2) $(x-5)^2-2(x-5)$

الحل

$$(x-5)(x-5-2)$$

$$(x-5)(x-7)$$

حاول بنفسك 3

حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) $16a(a-b)+24b(a-b)$

2) $(x+2)^2+3(x+2)$

مثال 4

حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

إذا كان $2x+y=7$ و $x+2y=8$

فأوجد القيمة العددية للمقدار $2x(x+2y)+y(x+2y)$

الحل

$$2x(x+2y)+y(x+2y)=(x+2y)(2x+y)$$

$$=8\times7=56$$

حاول بنفسك 4

حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

1) إذا كان $(x+y)=5$, $a+2b=7$

فأوجد القيمة العددية للمقدار $a(x+y)+2b(x+y)$

2) إذا كان $5a(2a-3b)+b(2a-3b)=195$, $(5a+b)=65$

فأوجد القيمة العددية للمقدار $(2a-3b)$

خاصية

إذا كان a و b عددين حقيقين وكان $a \times b = 0$ فإن

إما $a = 0$ أو $b = 0$ أو كليهما يساوي صفراً

مثال 5 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الاتية في R

1) $3x^2 + 6x = 0$

الحل

$3x^2 + 6x = 0$

$3x(x+2) = 0$

$3x = 0$ | $x+2=0$

$x = 0$ | $x = -2$

م.ح $\{0, -2\}$

2) $x^2 = 3x$

الحل

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$ | $x-3=0$

$x = 0$ | $x = 3$

م.ح $\{0, 3\}$

حاول بنفسك 4 أوجد مجموعة حل في R

1) $x^2 + 2x = 0$

2) $2x^2 - 3x = 0$



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1) ماالعامل المشترك الأكبر بين حدود كثيرة الحدود $18x^2 - 8x$

أ) 2 ب) $2x$

ج) 4 د) $4x$

2) أي مما يلي يمثل تحليلا لكثيرة الحدود $16x^2 - 24x^3$

أ) $8x(2x - 3x^2)$ ب) $4x^2(4 - 6x)$

ج) $8x^2(2 - 3x)$ د) $8(2x^2 - 3x^3)$

3) $6a - 8b = ...$

أ) $6(2a - 2b)$ ب) $14(a - b)$

ج) $2(3a - 4b)$ د) $6(2a - 4b)$

4) $x^2y - xy^2 = ...$

أ) $xy(x - y)$ ب) $x^2y(1 - y)$

ج) $xy^2(x - 1)$ د) $xy(y - x)$

5) $x(a-b) + y(a-b) = ...$

أ) $(x-y)(a-b)$ ب) $(x+y)(a+b)$

ج) $(x-y)(a+b)$ د) $(x+y)(a-b)$

ثانياً تطبيق المفاهيم

حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر

1. $15a - 25b$

2. $16a^6 - 4a^4 + 12a^2$

3. $(x+2)^3 - 2(x+2)^2$

4. $x^2 + x$

5. $12x^3 + 9x^2 + 3x$

6. $x^3y^3 + x^2y^2 + xy$

7. $(x+y)^2 - 3(x+y)$

8. $12y + 4$

9. $4m - mn$

10. $-4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 12x^2$

11. $12a^2 - 15a^2b^2$

12. $-7k-49m$

13. $9a^2b-6ab^2+3ab$

14. $2a-4ab-6abc$

15. $x^2y^3+x^2y^2+x^3y^2$

استخدم التحليل لإيجاد قيمة

1. $(75)^2+25\times 75$

2. $(99)^2+99$

استخدم التحليل بإخراج العامل المشترك لحل المعادلات

1. $x^2-3x=0$

2. $(x+3)^2-(x+3)=0$

3. إذا كان $a-b=7,(x+y)=5$
فأوجد القيمة العددية للمقدار $a(x+y)-b(x+y)$

4. إذا كان $(a+b)=7$
فأوجد القيمة العددية للمقدار $(a+b)^2+3(a+b)$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الاتيه فى R	حلل كثيرات الحدود الاتيه بإخراج العامل المشترك الأكبر
1. $x^2 - x = 0$	1. $a(b+5) + 2(b+5)$
2. $4x^2 + 8x = 0$	2. $(4X-1) - y(4X-1)$
3. $5x - x^2 = 0$	3. $(2X-3)^2 - 2(2X-3)$
4. $x^2 = 5x$	4. $(7X-5)^2 - 7X + 5$
5. $2x^2 - 3x = 0$	5. $(X+2)^3 - 2(X+2)^2$
6. $12x^2 - 4x = 0$	6. $3X + 6 - (X+2)^2$



تحليل ثلاثية الحدود

تحليل ثلاثية الحدود علي الصورة x^2+bx+c

عند ضرب ثنائيتي الحدود $(x+3)$ و $(x+2)$
نجد أن الناتج ثلاثية حدود كالتالي

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

لاحظ



الحد الأخير 6 في ثلاثية الحدود هو حاصل ضرب الحدين الأخيرين في ثنائيتي الحدود $3, 2$

معامل الحد الأوسط 5 في ثلاثية الحدود هو ناتج جمع الحدين الأخيرين في ثنائيتي الحدود $3, 2$

عملية تحليل ثلاثية الحدود هي عملية عكسية لعملية الضرب

فمثلاً لتحليل ثلاثية الحدود x^2+5x+6
ابحث عن عددين صحيحين حاصل ضربهما 6
ومجموعهما 5 تجد أن العددين هما $3, 2$

حيث أن $2\times3=6$ ، $2+3=5$
أي أن $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

تحليل ثلاثية الحدود علي الصورة x^2+bx+c

أولاً إذا كان الحد الأخير $(+)$ نحلله الى عددين مجموعهما = معامل الأوسط وإشارة القوسين مثل إشارة الأوسط

مثال 1 حلل كلاً مما يأتي

1) $x^2+7x+12$

الحل

$(x+4)(x+3)$

2) x^2-6x+8

الحل

$(x-4)(x-2)$

حاول بنفسك 1 حلل كلاً مما يأتي

1) $x^2-10x+21$

2) $x^2+11x+24$

3) $x^2+19x+48$

4) x^2-5x+4

ثانياً إذا كان الحد الأخير $(-)$ نحلله الى عددين الفرق بينهما = معامل الأوسط وإشارة القوسين مختلفة

مثال 2 حلل كلاً مما يأتي

1) x^2+x-12

الحل

$(x+4)(x-3)$

2) $x^2-7x-18$

الحل

$(x-9)(x+2)$

حاول بنفسك 1 حلل كلاً مما يأتي

1) $x^2-2x-15$

2) $x^2-2x-24$

3) $x^2+8x-20$

4) x^2+3x-4

لاحظ

قبل البدء في بالتحليل

- نرتب المقدار تنازليا تبع اسس x
- نخرج العامل المشترك



مثال 3 حلل كلاً مما يأتي

1) $3x^2+6x-72$

الحل

يوجد عامل مشترك هو 3

$3(x^2+2x-24)$

$3(x+6)(x-4)$

2) $12x-3x^3-9x^2$

الحل

نرتب الحدود

$-3x^3-9x^2+12x$

$-3x(x^2+3x-4)$

$-3x(x+4)(x-1)$

3) $x^2+5xy-6y^2$

الحل

$(x-y)(x+6y)$

4) $y(y+1)-30$

الحل

y^2+y-30

$(y+6)(y-5)$

حاول بنفسك 2 حلل كلاً مما يأتي

1) $4x^2-8x-60$

2) $-x^2+13x-36$

3) $x^2-8xy+12y^2$

4) $x(x-5)-14$

شغل دماغك 1



أوجد قيمة b الصحيحة التي تجعل المقادير التالية قابلة للتحليل

1) $x^2 - 5x + b$

2) $x^2 - bx + 3$

تحليل ثلاثية الحدود علي الصورة $ax^2 - bx + c$

حيث $(a \neq \pm 1)$

مثال 4 حلل كلاً مما يأتي

1) $2x^2 + 7x + 6$

الحل

طريقة الاقواس

$$2x^2 + 7x + 6 = (2x+3)(x+2)$$

حاصل ضرب الوسطين + حاصل ضرب الطرفين = الاوسط

$$3x + 4x = 7x$$

طريقة المقص

$(2x+6)$ / $(x+1)$	$(2x+1)$ / $(x+6)$	$(2x+3)$ / $(x+2)$
$2x+6x=8x\neq 7x$ ✗	$12x+x=13x\neq 7x$ ✗	$4x+3x=7x$ ✓

مثال 5 حلل كلاً مما يأتي

1) $4x^2 + x - 3$

الحل

$$(4x-3)(x+1)$$

تحقق $4x - 3x = x$

2) $2x^4 + 9x^2 + 10$

الحل

$$(2x^2+5)(x^2+2)$$

تحقق $5x^2 + 4x^2 = 9x^2$

حاول بنفسك 2 حلل كلاً مما يأتي

1) $3x^2 - 11x + 6$

2) $6x^2 - 7x + 2$

3) $2x^2 + x - 10$

مثال 6 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الاتيه في R

1) $x^2 + 5x - 36 = 0$

الحل

$$(x+9)(x-4) = 0$$

$x - 4 = 0$ | $x + 9 = 0$

$x = 4$ | $x = -9$

م.ح $\{-9, 4\}$

② $x^2 + 30 = 13x$

الحل

$x^2 - 13x + 30 = 0$

$(x-10)(x-3) = 0$

$x - 10 = 0$ | $x - 3 = 0$

$x = 10$ | $x = 3$

م.ح $\{10 ، 3\}$

حاول بنفسك 2

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الاتيه في R

① $x^2 - 8x + 15 = 0$

② $6x^2 - 7x + 2$

شغل دماغك 2



1 مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار 2 سم ومساحة سطحه 48 سم² أوجد محيطه

2 عدد نسبى موجب يزيد مربعه عن ضعفه بمقدار 35 أوجد العدد



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① أي مما يلي يمثل تحليلا لكثيرة الحدود $x^2 + x - 20$

أ $(x-4)(x+5)$ ب $(x+4)(x+5)$

جـ $(x+4)(x-5)$ د $(x-4)(x-5)$

② أي مما يلي يمثل تحليلا لكثيرة الحدود $9x^2 - 9x - 4$

أ $(3x-4)$ / $(3x+1)$ ب $(3x-2)$ / $(3x+2)$

جـ $(9x-1)$ / $(x+4)$ د $(9x-4)$ / $(x+1)$

③ إذا كان $(x-3)(x+5) = 0$

أ $x = 5, x = 3$ ب $x = -5, x = 3$

جـ $x = 5, x = -3$ د $x = -5, x = -3$

④ إذا كان $x^2 - ax + 15 = (x+3)(x+b)$ فما قيمة $b - a$

أ 5 ب 40

جـ 8 د 13

5) إذا كان $x^2-11x+28=(x-a)(x-b)$ فما قيمة $b+a$

أ) -16	ب) 11
جـ) -11	د) 16

6) إذا كان $(x-5)$ أحد عاملي ثلاثية الحدود $(2x^2-7x-15)$ فما العامل الآخر

أ) $x+3$	ب) $2x-3$
جـ) $2x+3$	د) $x-3$

7) إذا كان $3x-2y=2x+3y=5$ فما القيمة العددية لكثيرة الحدود $(6x^2+5xy-6y^2)$

أ) 11	ب) 10
جـ) 12	د) 25

ثانياً تطبيق المفاهيم

تمارين على تحليل المقدار الثلاثي على الصورة x^2+bx+c

1) $x^2-8x+15$

2) $x^2-3x-18$

3) $x^2-\quad x-30$

4) x^2-7x+6

5) $-x^2+3x+40$

6) $14x-32+x^2$

7) $3x^2+6x-45$

8) $y^2+42+13y$

تمارين علي تحليل المقدار الثلاثي علي صورة ax^2+bx+c

1) $5x^2-13x+6$

2) $3x^2-x-10$

3) $2x^2+11x+9$

4) $7x^2-11x-6$

5) $2x^2-7x+6$

6) $3x^2+14x+15$

7. $6x^2+7xy-3y^2$

8. $(x+2)(x-5)-8$

9. $6x^3-40x-22x^2$

10. $18-21x \ -9x^2$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الاتيه في R

1. $m^2-14m+45=0$

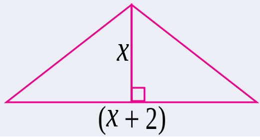
2. $x^2-21=4x$

3. $3y^2+17y+10=0$

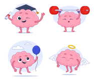
4. $(x-2)(x-3)=6$

5. مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار 3 سم ومساحة سطحه 40 سم² أوجد محيطه

6. مساحة Δ = 12 سم²



شغل دماغك 2



مثلث مساحته 35 سم² فإذا كان طول قاعدته يزيد 9سم عن الارتفاع المناظر لها فما ارتفاع المثلث



تحليل الحالات الخاصة

تحليل ثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً

إذا كانت ثلاثية الحدود مرتبه ترتيبا تصاعدياً أو تنازلياً حسب أسس أحد رموزها فإنها تمثل مربعاً كاملا إذا كان

- الحد الأول مربع كامل - الحد الثالث مربع
- الحد الأوسط يساوي $\left(\pm 2 \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

تحليل ثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً هو كتابتها علي صورة حاصل ضرب عاملين متساويين ((اي مربع أحد عامليها المتساويين

أي أن

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

مثال 1 بين أياً من كثيرات الحدود الاتية تمثل مربعاً كاملاً، ثم حل كثيرة الحدود التي علي صورة مربع كامل

1) $4x^2 + 20x + 25$

الحل

مربعاً كاملاً تحليله $(2x+5)^2$

2) $x^2 - 6x - 9$

الحل

ليست مربعاً كاملاً لأن الحد الأخير سالب

حاول بنفسك 1 بين أياً من كثيرات الحدود الاتية تمثل مربعاً كاملاً، ثم حل كثيرة الحدود التي علي صورة مربع كامل

1) $x^2 - 10x + 25$

2) $x^2 + 11x + 24$

فكرة

إيجاد الحد الناقص

- الحد الأوسط يساوي $\left(\pm 2 \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$
- الحد الأول يساوي $\dfrac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4 \times \text{الحد الثالث}}$
- الحد الثالث يساوي $\dfrac{\text{مربع الحد الأوسط}}{4 \times \text{الحد الأول}}$

مثال 2 أوجد قيمة a التي تجعل كلاً مما يأتي مربعاً كاملاً

1) $x^2 + 14x + a$

الحل

الأخير= $\dfrac{(14x)^2}{4x^2}$

$= 49$

2) $x^2 - ax + 64$

الحل

الأوسط= $\pm(8)(2)$

± 16

3) $4x^2 - ax + 9$

الحل

الأوسط= $\pm 2(3)(2)$

± 12

4) $x^2 - 20x + a$

الحل

الأخير= $\dfrac{(20x)^2}{4(x)^2} = 100$

حاول بنفسك 2 أوجد قيمة a التي تجعل كلاً مما يأتي مربعاً كاملاً

1. $x^2 + ax + 49$

الحل

2. $4x^2 - 44x + a$

الحل

تحليل الفرق بين مربعين

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مثال 3 حلل كلاً مما يأتي

1. $x^2 - 9$

الحل

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

2. $9x^4 - 16y^2$

الحل

$$9x^4 - 16y^2 = (3x^2 - 4y)(3x^2 + 4y)$$

3. $5x^3 - 45x$

الحل

$$5x(x^2 - 9) = 5x(x-3)(x+3)$$

حاول بنفسك 3 حلل كلاً مما يأتي

1. $x^2 - 1$
2. $16x^2 - 9$
3. $2x^3 - 50x$
4. $\frac{1}{3}x^2 - 3$
5. $(x+y)^2 - 25$
6. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{25}y^2$



فكرة

إيجاد القيمة العددية بإستخدام التحليل

مثال 4 إستخدم التحليل لإيجاد القيمة العددية لكل من

1. $(57)^2 + 2(57)(43) \times (43)^2$

الحل

$$(57+43)^2 = (100)^2 = 10000$$

2. $(99)^2 - 1$

الحل

$$(99+1)(99-1)$$

$$100 \times 98 = 9800$$

حاول بنفسك 4 إستخدم التحليل لإيجاد القيمة العددية لكل من

1. $(49)^2-2(49)(39)+(39)^2$

2. $(87)^2-(13)^2$

تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مثال 5 حلل كلاً مما يأتي

1. x^3-27

الحل

$$(x-3)(x^2+3x+9)$$

2. x^3+125

الحل

$$(x+5)(x^2-5x+25)$$

حاول بنفسك 5 حلل كلاً مما يأتي

1. x^3-64

2. $8x^3+27$

3. $2x^4-16x$

4. $\frac{1}{5}x^3+25$

حاول بنفسك 6 حلل كلاً مما يأتي

1. $x^2+x+\frac{1}{4}$

2. $y^2-\frac{1}{9}$

3. $8x^3-18x$

4. $\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}$

مثال 6  مهم

1. إذا كان $x-y=5, x+y=7$ أوجد قيمة x^2-y^2

الحل

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=5(7)=35$$

2. إذا كان $a^2-b^2=12, a-b=3$ أوجد قيمة $a+b$

الحل

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)=12$$
$$3(a+b)=12$$
$$\therefore a+b=4$$

3 إذا كان $x^3 - y^3 = 40, x^2 + xy + y^2 = 8$
أوجد قيمة $x - y$

الحل

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$40 = (x-y)(8)$$
$$x - y = 5$$

مثال 7 أوجد مجموعة الحل في R

1 $x^2 + 49 = 14x$

الحل

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$
$$(x-7)^2 = 0$$
$$\therefore x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$$

2 $5x^2 = 20$

الحل

$$5x^2 - 20 = 0$$
$$5(x^2 - 4) = 0$$
$$5(x-2)(x+2) = 0$$

$x + 2 = 0$	$x - 2 = 0$
$x = -2$	$x = 2$

مجموعة الحل هي $\{2, -2\}$

حاول بنفسك 1 أوجد مجموعة الحل في R

1 $x^2 + 121 = 22x$

2 $2x^2 = 50$



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 إذا كان $x^2 - b^2 = (x-3)(x+3)$ فما قيمة b

أ ± 6 ب ± 9
جـ ± 1 د ± 3

2 إذا كان $ax^3 - 27 = (2x-3)(4x^2 + bx + 9)$ فما قيمة ab

أ 6 ب 48
جـ 24 د 12

3) إذا كانت كثيرة الحدود $(kx^2 - 12x + 9)$ مربعاً كاملاً، فما قيمة k

أ) 4 ب) ± 2

جـ) 2 د) ± 4

4) إذا كان $ax^2 - b = (3x-2)(3x+2)$ فما قيمة $a+b$

أ) -5 ب) 5

جـ) -13 د) 13

5) إذا كانت كثيرة الحدود $(4x^2 + kx + 1)$ مربعاً كاملاً، فما قيمة k

أ) ± 4 ب) ± 1

جـ) ± 8 د) ± 2

6) إذا كان $a - b = 2, a^2 - b^2 = 16$ فما الوسط الحسابي a, b

أ) 2 ب) 4

جـ) 8 د) 16

ثانياً تطبيق المفاهيم حلل كلاً مما يأتي

تمارين على المربع الكامل و فرق بين مربعين

1) $a^2 + 18a + 81$

2) $b^2 + 14a + 49$

3) $9x^2 + 6x + 1$

4) $25 - 9x^2$

5) $1 - 4a^2b^2$

6) $k^2 - 36m^2$

7) $y^2 - 9x^2$

8) $20x^3 - 45x$

9) $x^4 - 81$

10) $x^2 - \frac{4}{81}$

11) $\frac{1}{5}x^2 - 5$

12) $(x+3)^2 - 16$

13) $121y - y^3$

14) $-27x^2 + 75$

15) $x^4 - 13x^2 + 36$

16) $6a^2(x+2y) - 24b^2(x+2y)$

تمارين على تحليل المكعبين

1) $x^3 + 27$

2) $64x^3 - 125y^3$

3) $54x^3 + 16$

4) $125x^3 + \frac{1}{8}$

5) $(x+3)^3 + 64$

6) $x^6 - 7x^3 - 8$

7 m^6-64n^3

8 $4x^4+4000x$

9 x^6-64y^6

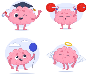
أوجد مجموعة الحل في R

7 $4x^2+1=4x$

2 $x^3=25x$

3 $x^2+6x=-9$

شغل دماغك



إذا كان $ab=10, a-b=3$
أوجد قيمة a^3-b^3



التحليل بالتقسيم

يمكن تحليل كثيرة الحدود المكونة من أربعة حدود باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين

الطريقة الأولى

قسم كثيرة الحدود إلى ثنائيتى حدود بحيث تستطيع تحليل كل ثنائية حدود ،ثم أخرِج ثنائية الحدود المكررة كعامل مشترك

مثال 1 حلل كلاً مما يأتي

1) $ax+by+ay+bx$

الحل

هنرتب $ax+bx+ay+by$

$x(a+b)+y(a+b)$

$(a+b)(x+y)$

2) $3x^2-3y+xy-9x$

الحل

هنرتب $3x^2-9x+xy-3y$

$3x(x-3)+y(x-3)$

$(x-3)(3x+y)$

3) $3x^3+2x^2-3x-2$

الحل

هنرتب $x^2(3x+2)-(3x+2)$

$(3x+2)(x^2-1)$

$(3x+2)(x-1)(x+1)$

حاول بنفسك 1 حلل كلاً مما يأتي

1) $x^2+4x+bx+4b$

الحل

....

....

....

....

2) $xy+12-3x-4y$

الحل

....

....

....

....

3) $x^3+6x^2-4x-24$

الحل

....

....

....

....



لاحظ

يمكن تقسيم المقدار على أساس الفرق بين مربعين

مثال

1 حل $x^2 - y^2 + 4x + 4y$

الحل

$$(x-y)(x+y)+4(x+y)$$
$$(x+y)(x-y+4)$$

2 $x^2 - 5x - y^2 + 5y$

الحل

$$x(x-5)-y(y-5)$$
$$(x-5)(x-y)$$

حاول بنفسك 3

1 حل $x^2 + 3x - 3y - y^2$

الحل

....

....

....

....



لاحظ

يمكن تحليل المقدار الثلاثي $ax^2 + bx + c$ بالتقسيم الطريقة هي هنقسم الحد الأوسط الى مجموع عددين حاصل ضربهما = الأول × الأخير

مثال

1 حل $3x^2 + 8x + 4$ باستخدام التحليل بالتقسيم

الحل

هنقسم العدد 8 الى $2+6$ لأن $3 \times 4 = 2 \times 6$

$$3x^2 + 6x + 2x + 4$$
$$3x(x+2)+2(x+2)$$
$$(x+2)(3x+2)$$

2 حل $2x^2 - x - 28$ باستخدام التحليل بالتقسيم

الحل

الأوسط (-1) هنقسمه الى $-8+7$ لأن $2 \times -28 = -8 \times 7$

$$2x^2 - 8x + 7x - 28$$
$$2x(x-4)+7(x-4)$$
$$(x-4)(2x+7)$$

حاول بنفسك 2

حل بالتقسيم

1 $3x^2 - 13x + 12$

الحل

....

....

....

....

2 $5x^2 - 7x - 6$

الحل

....

....

....

الطريقة الثانية

قسم كثيرة الحدود الى ثلاثية حدود تمثل مربعاً كاملاً والحد الرابع يجب أيضًا أن يكون مربعاً كاملاً بحيث يتم تحليل كثيرة الحدود الأصلية كفرق بين مربعين

مثال 2 حلل كلاً مما يأتي

1) $x^2+16y^2-8xy-49$

الحل

$$(x^2-8xy+16y^2)-49$$
$$(x-4y)^2-(7)^2$$
$$(x-4y-7)(x-4y+7)$$

2) $4x^2-y^2+10xy-25x^2$

الحل

$$4x^2-(y^2-10yz+25z^2)$$
$$4x^2-(y-5z)^2$$
$$[2x-(y-5z)][2x+(y-5z)]$$
$$(2x-y+5z)(2x+y-5z)$$

حاول بنفسك 4 حلل بالتقسيم

1) $x^2-12xy+36y^2-4$

الحل

....

....

....

....

2) $x^2+y^2-64+2xy$

الحل

....

....

....

....

إكمال المربع

إكمال المربع هو عملية إضافة حد جبرى الى ثنائية حدود لتصبح ثلاثية حدود على صورة مربع كامل يمكن أن يتم إكمال المربع بإحدى الطريقتين الاتيتين

- إما إضافة الحد الأوسط $\left(\pm 2\times\sqrt{\text{الحد الأول}}\times\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

فمثلاً (x^2+49) يضاف إليها $\pm 14x=\pm 2\sqrt{x^2}\sqrt{49}$

فيكون $x^2\pm 14x+49$ مربعاً كاملاً

أي يكتب علي الصورة $(x\pm 7)^2$

مثال 3 حلل كلاً مما يأتي

1) $81x^4+4$

الحل

الأوسط $\pm 9x^2(2)(2)=\pm 36x^2$

$$81x^4+36x^2+4-36x^2$$
$$(9x^2+2)^2-36x^2$$
$$(9x^2+2-6x)(9x^2+2+6x)$$

ويمكن إختصار الحل بالطريقة

$\left(\sqrt{\text{الأول}}+\sqrt{\text{الثاني}}\right)^2-$ الأوسط

$$(9x^2+2)^2-36x^2$$
$$(9x^2+2-6x)(9x^2+2+6x)$$

2 x^4+2500

الحل

$$(x^2+50)^2-100x^2$$

$$(x^2+50-10x)(x^2+50+10x)$$

حاول بنفسك 5 حلل

1 x^4+64

الحل

....

....

....

....

2 x^4+4

الحل

....

....

....

....

فكرة 3 حدود

مثال 4 حلل كلاً مما يأتي

1 $x^4+15x^2y^2+64y^4$

الحل

هنشتغل على الحدين اللي فيهم أس (4) أو جذر تربيعي

$$(x^4+64y^4)+15x^2y^2$$

$$(x^2+8y^2)^2-16x^2y^2+15x^2y^2$$

$$(x^2+8y^2)^2-x^2y^2$$

$$(x^2+8y^2-xy)(x^2+8y^2+xy)$$

2 x^4-3x^2+9

الحل

$$(x^4+9)-3x^2$$

$$(x^2+3)^2-6x^2-3x^2$$

$$(x^2+3)^2-9x^2$$

$$(x^2+3-3x)(x^2+3+3x)$$

حاول بنفسك 6 حلل

1 $4x^4+8x^2+9$

الحل

....

....

....

....

2 $4x^4+4x^2+25$

الحل

....

....

....

....

مثال 5 حل كلاً مما يأتي

1) $x^4 - 18x^2 + 49$

الحل

$(x^4 + 49) \quad -18x^2$

الأوسط $\pm 14x^2$

$x^4 + 14x^2 + 49 - 14x^2 - 18x^2$

$(x^2 + 7)^2 - 32x^2$

الحد $32x^2$ ليس له جذر تربيعي نبدل الإشارات

$x^4 - 14x^2 + 49 + 14x^2 - 18x^2$

$(x^2 - 7)^2 - 4x^2$

$(x^2 - 7 - 2x)(x^2 - 7 + 2x)$

فكرة اخرى في إكمال المربع

مثال 6

1) حل $x^2 + 10x$ بإستخدام إكمال المربع

الحل

هنا الحد الناقص هو الأخير

الأخير= $\dfrac{\text{مربع الأوسط}}{4 \times \text{الأول}} = \dfrac{100x^2}{4x^2}$

هنضيفه ونطرحه

$x^2 + 10x + 25 - 25$

$(x+5)^2 - 25$

$(x+5+5)(x+5-5)$

$x(x+10)$

حاول بنفسك 7 حل بإستخدام إكمال المربع

1) $x^2 + 4x$

الحل

....

....

....

....

2) $x^2 - 22x$

الحل

....

....

....

....

3) $x^2 + x$

الحل

....

....

....

....



الواجب

أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1) $x^2 - ax + bx - ab = ...$

أ) $(x-a)(x-b)$ ب) $(x+a)(x-b)$
ج) $(x-a)(x+b)$ د) $(x+a)(x+b)$

2) إذا كان $xy + 5x + 7y + 35 = (x+a)(y+b)$ فما قيمة $a-b$

أ) 2 ب) -12
ج) -2 د) 12

3) إذا كان $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x+a)(x+b)(x+c)$ فما قيمة $a+b+c$

أ) 2 ب) 9
ج) 5 د) 7

4) إذا كان $x^2 + a = 12, x + b = 5$ فما قيمة $x^3 + bx^2 + ax + ab$

أ) 17 ب) 60
ج) 7 د) 30

5) عند إكمال المربع للمقدار $(x^2 + 9)$ نضيف إليه

أ) $\pm 3x$ ب) $\pm 12x$
ج) $\pm 6x$ د) $\pm 9x$

6) عند إكمال المربع للمقدار $(x^2 + 12x)$ نضيف إليه

أ) 36 ب) ± 36
ج) 9 د) ± 9

7) إذا كان $(x^2 + 2x + 2)$ أحد عاملى المقدار $(x^4 + 4)$ فما العامل الاخر

أ) $x^2 - 2x + 2$ ب) $x^2 + 2x + 2$
ج) $x^2 - 2x - 2$ د) $x^2 - 2x + 2$

ثانياً تطبيق المفاهيم

حلل كلاً مما يأتي

1) $ax + bx + b + a$

2) $12y + 2x - 8xy - 3$

3) $6m - n + 3mn - 2$

4) $x^2 - 2x - xy + 2y$

5. $11x^3-6x^2-11x+6$

6. $45x^3+20x^2+9x+4$

7. $x^4+2x^3-9x^2-18x$

8. $x^2-y^2-6x-6y$

9. x^2-a^2-2x+1

10. $4x^2-12xy+9y^2-49$

11. $4x^4-49x^2+14x-1$

12. x^3+y^3-x-y

حلل كلاً مما يأتي بالتقسيم

1. $2x^2+7x+3$

2. $4x^2-7x-2$

3. $2x^2+13x+15$

حلل

1. x^4+4y^4

2. $64x^4+y^4$

3. $4x^4+1$

4. $x^4+x^2y^4+y^8$

5 x^4-23x^2+1

6 x^4-11x^2+1

7 x^5+5x^3+9x

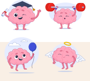
8 $16x^4+20x^2y^2+9y^4$

9 $4x^2\left(4x^2-7y^2\right)+y^4$

أوجد حل المعادلة في R

7 $x^3+x^2-4x=4$

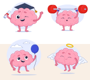
شغل دماغك



1 إذا كان $a+b=3$

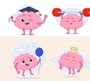
فما قيمة $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

شغل دماغك



2 حلل x^8-16y^8

شغل دماغك



3 $x^2+12x+15=0$

تمارين على الوحدة الثانية



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 إذا كانت كثيرة الحدود $(9x^2 + kx + 49)$ مربعاً كاملاً فما قيمة k

أ ± 7 — ب ± 21

ج ± 42 — د ± 72

2 إذا كان $x^2 - 14x + 24 = (x-a)(x-b)$ فما قيمة $a+b$

أ 10 — ب -14

ج -10 — د 14

3 إذا كان $x + y = 7, m - n = 5$ فإن $x(m-n) - y(n-m)$

أ 2 — ب 12

ج 70 — د 35

4 $x^3 + y^3 = (.........)(x^2 - xy + y^2)$

أ $(x-y)$ — ب $(x^2 + y^2)$

ج $(x+y)$ — د $(x^2 - y^2)$

5 إذا كان $x + y = 4, x^2 - y^2 = 12$ فما قيمة $y - x$

أ 8 — ب -3

ج 48 — د 3

6 إذا كان المقدار $(9x^2 + 30kx + b)$ مربعاً كاملاً فما قيمة b

أ 5 — ب 4

ج -25 — د 25

7 إذا كان $a^2 - 2ab + b^2 = 9$ فما قيمة $a - b$

أ 3 — ب ± 3

ج 6 — د -3

8 إذا كان $x^3 + a = (x+5)(x^2 - 5a + b)$ فإن $a + b$

أ 125 — ب 150

ج 100 — د 25

9 إذا كان $x^2 - xy + x^2 = 4, x^3 + y^3 = 20$ فإن $2x + 2y$

أ 20 — ب 10

ج 5 — د 15

10 مامجموعة حل المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ في R

أ $\{-1, -3\}$ — ب $\{-1, 3\}$

ج $\{1, 3\}$ — د $\{1, -3\}$

11 إذا كان $c - d = \sqrt{5}, a + b = 2\sqrt{5}$ فما قيمة $ac - ad + bc - bd$

أ $\sqrt{5}$ — ب 10

ج $3\sqrt{5}$ — د 20

12 مجموعة حل المعادلة $x^2+25=10x$ هي

أ 5 ب -5

ج ± 5 د 0

حلل كلاً مما يأتي تحليلاً تاماً

1 $5x^2-9x-2$

2 $3x^2+2x-5$

3 $x^2+2xy+y^2-1$

4 $4x^4+625$

5 k^2-9m^2

6 x^3y^3-27

7 $4x^2-25y^2$

8 $xy+5y+4x+20$

9 $3x^2+7x-6$

10 $ax+5x+7a+35$

11 $2x^2-5x-3$

12 $x^3-3x^2+6x-18$

13 x^2-6x-y^2+6y

14 $8x^5-10x^3y^2+2xy^4$

أوجد مجموعة الحل في R

1. $x^2 - 2x = 8$

2. $x^2 - 3x - 28 = 0$

3. $x(x-2) = 15$

4. $x^2 - 4x = 0$

5. $x^2 - 9 = 0$

6. $x^2 + 4 = 5x$

مسائل لفظيه

1. متوازي أضلاع مساحته 60سم، وطول قاعدته يزيد عن الارتفاع المناظر لها بمقدار 7سم، فما ارتفاع متوازي الاضلاع

2. مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار 2سم ومساحة سطحه 24سم^2 أوجد محيطه

3. عدد موجب يزيد مربعه عن ضعفه بمقدار 15 أوجد العدد

4. أوجد العدد النسبي الموجب الذي اذا أضيف مربعه الى 3 امثاله كان الناتج 28

استخدم التحليل لإيجاد قيمة

1. $(99)^2 + 2(99) + 1$

2. $(45)^2 - (35)^2$

الوحدة الثالثة

الدرس الأول	التطابق
الدرس الثاني	نظرية فيثاغورث وعكسها
الدرس الثالث	تطبيقات التوازي
الدرس الرابع	متوسطات المثلث
الدرس الخامس	المثلث المتساوي الساقين
الدرس السادس	الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات

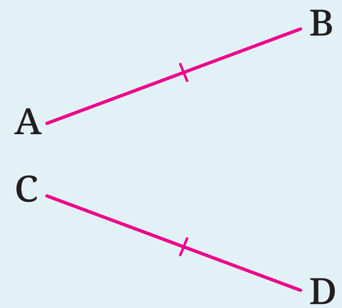
1 التطابق



تعلم !

تطابق قطعتين مستقيمتين

تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا تساويتا في الطول .

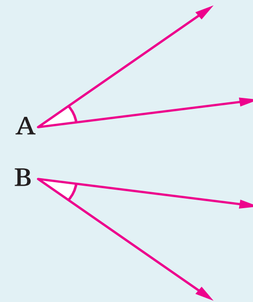


إذا كان : طول $\overline{AB}$ = طول $\overline{CD}$

فإن : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

تطابق زاويتين

تتطابق الزاويتان إذا تساويتا في القياس.



إذا كان : $m(\angle A) = m(\angle B)$

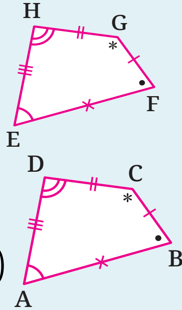
فإن : $\angle A \cong \angle B$

تطابق مضلعين

يتطابق المضلعان إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

- أضلاعهما المتناظرة متساوية في الطول .
- زواياهما المتناظرة متساوية في القياس .

إذا كان $EFGH$, $ABCD$ مضلعين فيهما : -



1 $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$, $AD = EH$

2 $m(\angle A) = m(\angle E), m(\angle B) = m(\angle F)$

$m(\angle C) = m(\angle G), m(\angle D) = m(\angle H)$

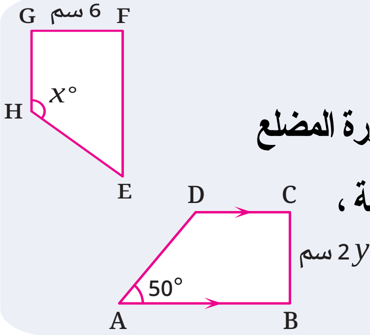
فإن : المضلع $EFGH \cong$ المضلع $ABCD$

مثال 1

في الشكل المقابل :

إذا كان المضلع $EFGH$ صورة المضلع $ABCD$ بدوران ما حول نقطة ،

فما قيمة كل من x ، y ؟



الحل

$\because \overline{AB} // \overline{DC}$ (زاويتان داخليتان وفي جهة واحدة من القاطع $\overleftrightarrow{AD}$)

$\therefore m(\angle A) + m(\angle D) = 180°$

$\therefore m(\angle D) = 180° - 50° = 130°$

$\because$ المضلع $EFGH$ صورة المضلع $ABCD$ بالدوران

$\therefore$ المضلع $ABCD \cong$ المضلع $EFGH$

$\therefore m(\angle H) = m(\angle D) = 130°$ $\therefore x = 130$

$BC = FG$ $\therefore 2y = 6$ $\therefore Y = 3$



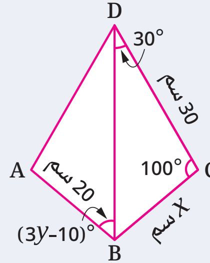
حاول بنفسك 1

في الشكل التالي :

$\Delta\, BAD$ صورة $\Delta\, BCD$

بالانعكاس في $\overleftrightarrow{DB}$ ،

أوجد قيمة كل من x ، y ؟



الحل

تطابق مثلثين

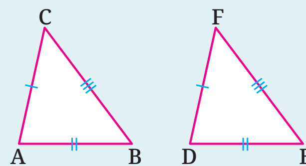
المثلث هو مضلع ثلاثي يحتوى على 6 عناصر (3 أضلاع و 3 زوايا)، ولإثبات تطابق مثلثين لا يُشترط إثبات تطابق كل العناصر المتناظرة ، بل يُكتفى بثلاثة عناصر بينهم ضلع واحد على الأقل.

حالات تطابق مثلثين

الحالة الأولى : ثلاثة أضلاع (sss)

يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع في أحد المثلثين مع نظيره في المثلث الآخر إذا كان :

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$



فإن :

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



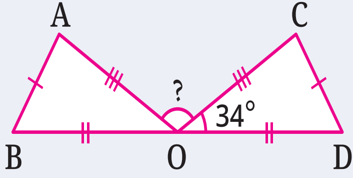
مثال 2

في الشكل التالي :

1 برهن أن :

$\Delta OAB \cong \Delta OCD$

2 أوجد : $m(\angle AOC)$



الحل

$\because$ المثلثين OCD , OAB فيهما :

1 $OB = OD$ 2 $AO = OC$ 3 $AB = CD$

$\therefore \Delta OCD \cong \Delta OAB$ وينتج أن

$m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 34°$

$m(\angle AOC) = 180 - (34 + 34) = 180 - 68 = 112°$



حاول بنفسك 2

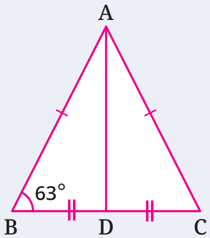
في الشكل التالي :

النقطة D منتصف $\overline{BC}$ ، $AB = AC$ ،

$m(\angle B) = 63°$

1 أثبت أن : $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

2 أوجد بالبرهان : $m(\angle DAC)$



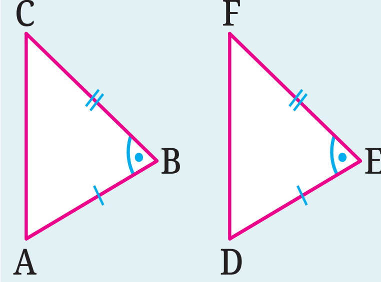
الحل

حالات تطابق مثلثين

الحالة الثانية : ضلعان وزاوية محصورة (SAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.

إذا كان : $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، $\angle B \cong \angle E$ ، $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

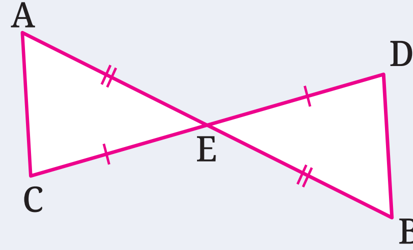


فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



مثال 3

في الشكل المقابل :



E نقطة منتصف كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

برهن أن : ❶ $\Delta AEC \cong \Delta BED$ ❷ $\overline{AC} \,//\, \overline{DB}$

الحل

$\because$ المثلثين AEC , BED فيهما :

❶ $CE = ED$ ❷ $AE = EB$

❸ $m(\angle AEC) = m(\angle DEB)$ بالتقابل بالرأس

$\therefore \Delta AEC \cong \Delta BED$ وينتج أن

$m(\angle C) = m(\angle D)$

وهما في وضع تبادل $\therefore$ $\overline{AC} \,//\, \overline{DB}$



حاول بنفسك 3

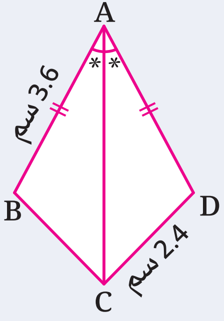
$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، $AB = 3.6$ سم،

$CD = 2.4$ سم، $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle BAD$

❶ برهن أن :

$\Delta ACB \cong \Delta ACD$

❷ أوجد محيط المضلع ABCD



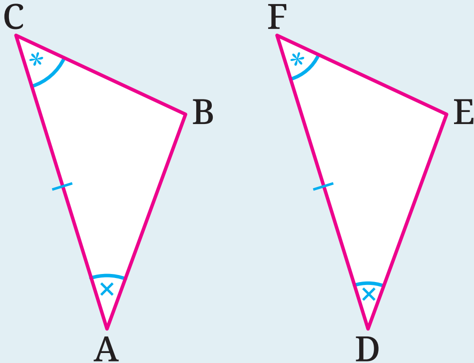
الحل

حالات تطابق مثلثين

الحالة الثالثة : زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما (ASA)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.

إذا كان : $\angle C \cong \angle F$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، $\angle A \cong \angle D$

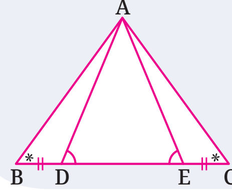


فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 4

في الشكل المقابل :

$\angle B \cong \angle C$, $\angle ADE \cong \angle AED$, $\overline{BD} \cong \overline{CE}$



أثبت أن : (1) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

الحل

∵ المثلثين AEC , ABD فيهما :

(1) $m(\angle ADB) = m(\angle AEC)$

(2) $m(\angle B) = m(\angle C)$

(3) $BD = EC$

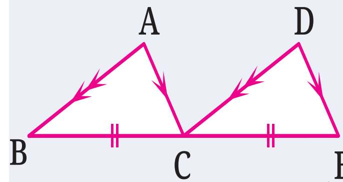
∴ $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

حاول بنفسك 4

في الشكل المقابل :

$\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AC} // \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{CE}$



برهن أن : $\Delta ABC \cong \Delta DCE$

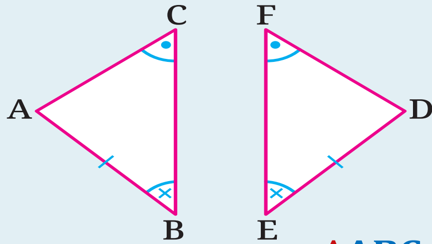
الحل

حالات تطابق مثلثين

الحالة الرابعة : زاويتان وضلع غير واصل بين الرأسين (AAS)

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير واصل بين الرأسين في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر.

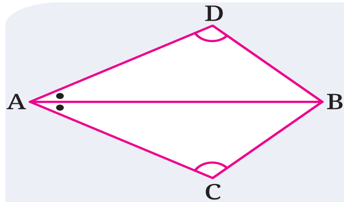
إذا كان : $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$



فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 5

في الشكل المقابل :



$\overrightarrow{AB}$ ينصف $\angle DAC$

$\angle ADB \cong \angle ACB$

برهن أن : (1) $\Delta ADB \cong \Delta ACB$

الحل

∵ المثلثين ADB , ACB فيهما :

(1) $\overline{AB}$ ضلع مشترك

(2) $m(\angle D) = m(\angle C)$

(3) $m(\angle DAB) = m(\angle CAB)$

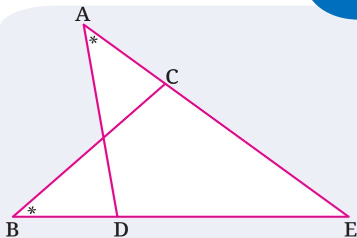
∴ $\Delta ADB \cong \Delta ACB$

حاول بنفسك 5

في الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، $\angle A \cong \angle B$

أثبت أن : $AE = BE$



الحل

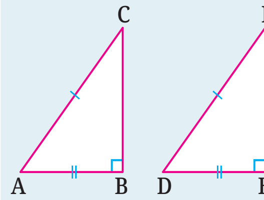
حالات تطابق مثلثين

الحالة الخامسة : وتر و أحد ضلعى القائمة (RHS)

يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر و أحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظيريهما فى المثلث الآخر.

إذا كان : $m(\angle B) = m(\angle E) = 90^\circ$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$



فإن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

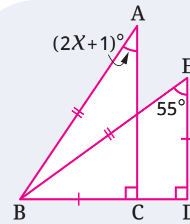
مثال 6

في الشكل المقابل :

$BC = DE$, $AB = EB$

1 أثبت أن : $\Delta ACB \cong \Delta BDE$

2 أوجد قيمة : X



الحل

∵ المثلثين ACB , BDE فيهما :

1 $AB = EB$ 2 $BC = DE$ 3 $m(\angle C) = m(\angle D) = 90^\circ$

∴ $\Delta ACB \cong \Delta BDE$ وينتج أن

$m(\angle A) = m(\angle EBD) = 180 - (90 + 55) = 35^\circ$

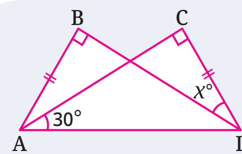
∴ $2X + 1 = 35$ ∴ $2X = 34$ ∴ $X = 17$



حاول بنفسك 5

في الشكل المقابل :

أوجد قيمة : X



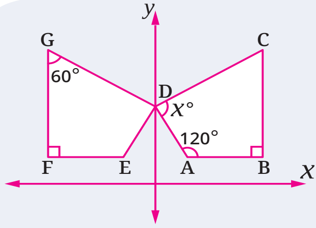
الحل

الواجب



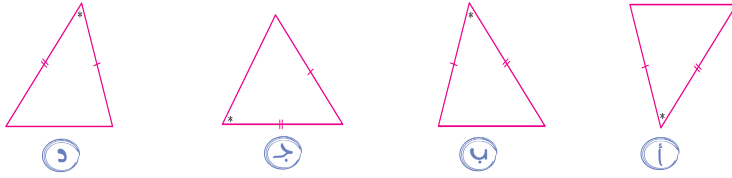
أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 في الشكل المقابل :
المضلع EFGD صورة
المضلع ABCD بالانعكاس
فى محور y أوجد قيمة : X



أ 90 ب 60 ج 120 د 70

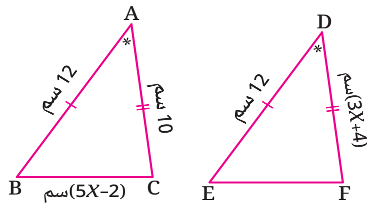
2 أى من المثلثات التالية لا يطابق المثلثات الأخرى؟



أ ب ج د

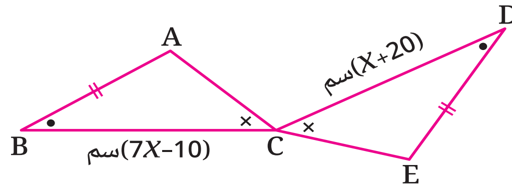
3 فى الشكل التالى : ما طول $\overline{EF}$ ؟

أ 6سم
ب 8سم
ج 10سم
د 12سم



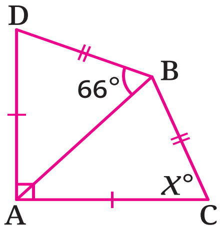
4 فى الشكل التالى : ما طول $\overline{BC}$ ؟

أ 5سم
ب 7سم
ج 20سم
د 25سم



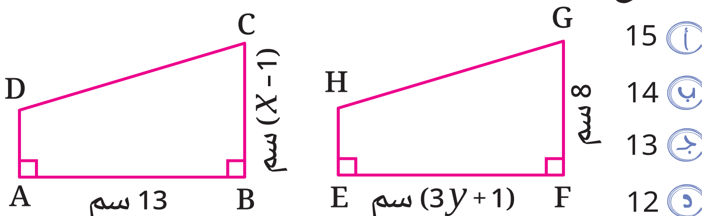
5 فى الشكل التالى : ما قيمة x ؟

أ 66
ب 45
ج 34
د 69



6 فى الشكل المقابل : إذا كان المضلع EFGH صورة المضلع ABCD بانتقال ما، فما قيمة $x + y$ ؟

أ 15
ب 14
ج 13
د 12

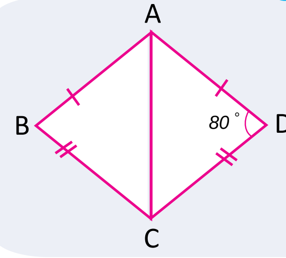


ثانياً المقالي

1 من الشكل أثبت أن

$\Delta ABC \cong \Delta ADC$

ثم اوجد $m(\angle B)$

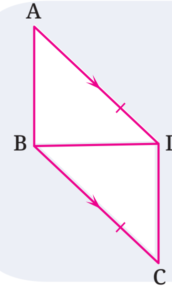


الحل

2 فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

برهن أن : $\Delta ABD \cong \Delta CDB$



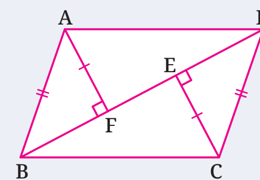
الحل

3 فى الشكل المقابل :

برهن أن :

① $\overline{AB} // \overline{CD}$

② $DF = BE$

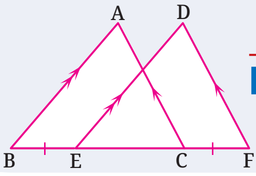


الحل

4 فى الشكل المقابل :

$\overline{BA} // \overline{ED}$, $\overline{CA} // \overline{FD}$, $\overline{BE} \cong \overline{FC}$

برهن أن : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

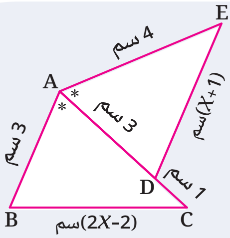


الحل

5 فى الشكل المقابل :

برهن أن : $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ ،

ثم أوجد قيمة x .



الحل

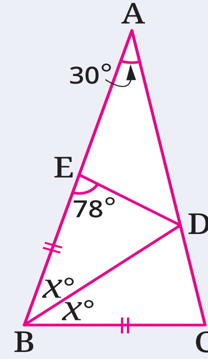


شغل دماغك

1 فى الشكل المقابل :

① أثبت أن : $\Delta BCD \cong \Delta BED$

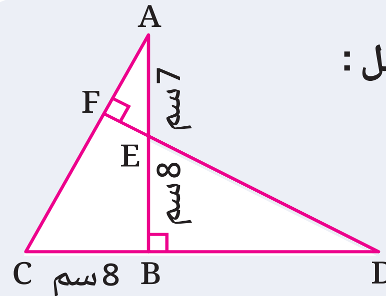
② أوجد قيمة x



الحل

2 فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{BD}$

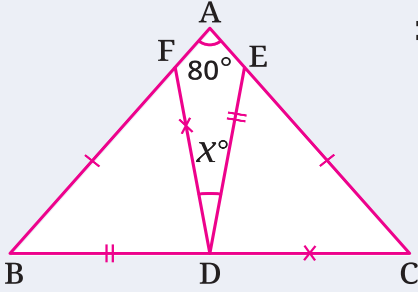


الحل

4 فى الشكل المقابل :

① أثبت أن : $\Delta BFD \cong \Delta ECD$

② أوجد قيمة x



الحل

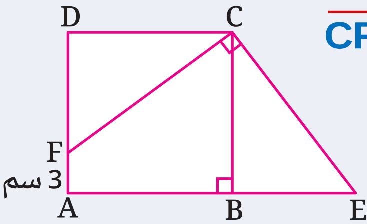
3 فى الشكل المقابل :

ABCD مربع طول ضلعه 12 سم

$\overline{CF} \perp \overline{CE}$, 3 سم = AF

① أثبت أن : $\Delta CBE \cong \Delta CDF$

② أوجد طول $\overline{BE}$



الحل

2 نظرية فيثاغورس وعكسها



تعلم !

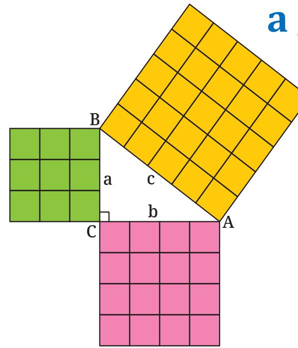
نظرية فيثاغورس

مساحة المربع المنشأ على الوتر في المثلث القائم الزاوية تساوى مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة .

صيغة أخرى لنظرية فيثاغورس :

في المثلث القائم الزاوية ، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.

أي أن : $c^2 = a^2 + b^2$ حيث a , b طولا ضلعى القائمة في المثلث , c طول وتر المثلث



استخدام نظرية فيثاغورس

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع فى مثلث قائم الزاوية بمعلومية طولى الضلعين الآخرين.

فكرة :

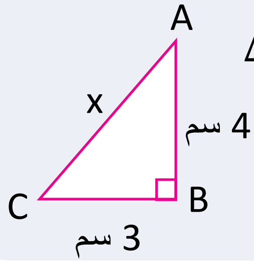
المطلوب إيجاد وتر المثلث

بنربع ونجمع ونجذر



مثال 1

1 أوجد قيمة x ومساحة Δ



الحل

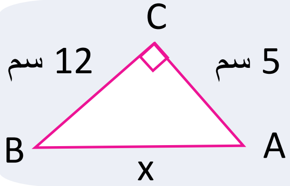
$c^2 = (3)^2 + (4)^2$

$x^2 = 25$

$x = \sqrt{25} = 5$

مساحة $\Delta = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ سم^2

2 أوجد قيمة x ومساحة Δ



الحل

$c^2 = (a)^2 + (b)^2$

$x^2 = 25 + 144$

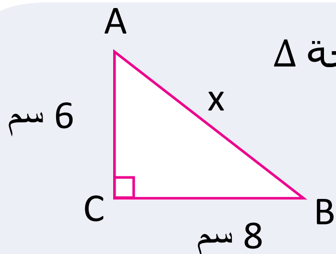
$x^2 = 169 \quad \therefore x = 13$

مساحة $\Delta = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ سم^2



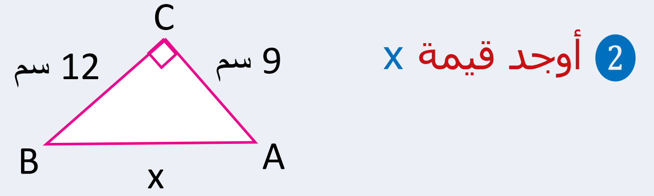
حاول بنفسك 1

1 أوجد قيمة x ومساحة Δ



الحل

2 أوجد قيمة x



الحل

فكرة :

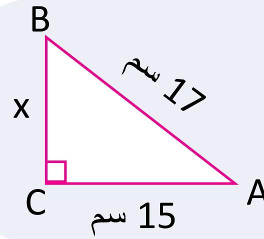
إيجاد طول ضلع قائمة

بنربع ونطرح ونجذر



مثال 2

1 أوجد قيمة x



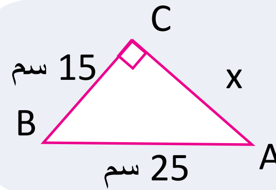
الحل

$x^2 = (17)^2 - (15)^2$

$x^2 = 289 - 225$

$x^2 = 64 \quad \therefore x = 8$

2 أوجد قيمة x



الحل

$x^2 = (25)^2 - (15)^2$

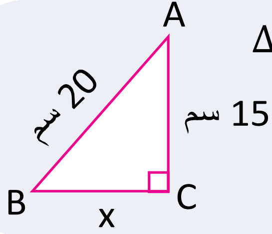
$x^2 = 625 - 225$

$x^2 = 400 \quad \therefore x = \sqrt{400} = 20$



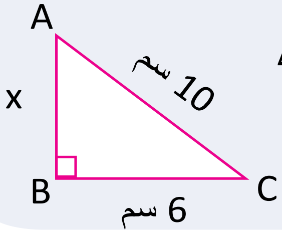
حاول بنفسك 2

1 أوجد قيمة x ومساحة Δ



الحل

2 أوجد قيمة x ومساحة Δ

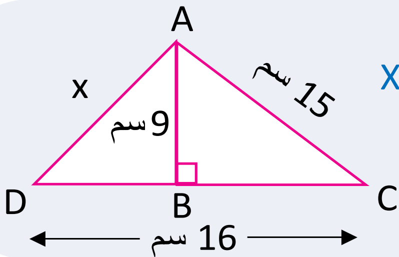


الحل



حاول بنفسك 3

1 من الشكل أوجد قيمة x

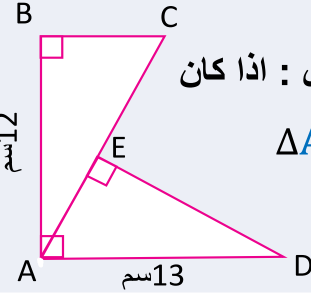


الحل

2 في الشكل المقابل : اذا كان

$\Delta ABC \cong \Delta DEA$

أوجد طول EC



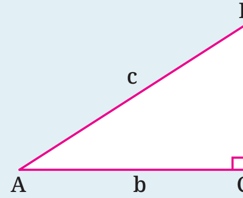
الحل

عكس نظرية فيثاغورس

إذا كان مجموع مربعى طولى ضلعين فى مثلث يساوى مربع طول الضلع الثالث كان المثلث قائم الزاوية. إذا كان المثلث ABC فيه :

$a^2 + b^2 = c^2$

فإن : $m(\angle C) = 90°$



أى أن : المثلث ABC يكون قائم الزاوية فى C



مثال 3

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

1 15 سم ، 13 سم ، 8 سم

الحل

طول أكبر ضلع = 15

$\because (13)^2 + (8)^2 = 233$,

$\because (15)^2 = 225$

$\therefore (13)^2 + (8)^2 \neq (15)^2$

∴ المثلث غير قائم الزاوية.

2 24 سم ، 7 سم ، 25 سم

الحل

∵ طول أكبر ضلع = 25

$\because (7)^2 + (24)^2 = 625$,

$\because (25)^2 = 625$

$\therefore (7)^2 + (24)^2 = (25)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية.



حاول بنفسك 3

أى مما يأتى يمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

1 41 سم ، 40 سم ، 9 سم

الحل

2 5 سم ، $3\sqrt{2}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم

الحل

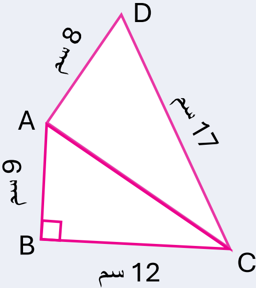


مثال 4

من الشكل أوجد AC

ثم اثبت أن

ΔACD قائم



الحل

∵ $\triangle ABC$ قائم فى B

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = 144 + 81 = 225$

$(AC) = \sqrt{225} = 15$

في ΔABC

$\because (AC)^2 = (17)^2 = 289$

$\because (AD)^2 + (AC)^2 = 225 + 64 = 289$

$\therefore (DC)^2 = (AD)^2 + (AC)^2$

∴ ΔABC قائم

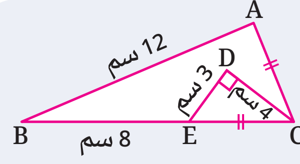


حاول بنفسك 4

فى الشكل التالى :

$EC = AC$

أثبت أن : $m(\angle A) = 90°$



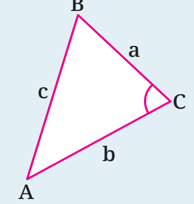
الحل

متباينة فيثاغورس

فى المثلث ABC :

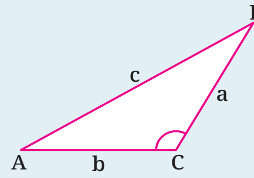
إذا كان c طول أكبر أضلاع المثلث، وكان :

$c^2 < a^2 + b^2$



كان ΔABC حاد الزوايا

$c^2 > a^2 + b^2$



كان ΔABC منفرج الزاوية



مثال 4

عين نوع كل مثلث

بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

1. 9 سم ، 10 سم ، 11 سم
2. 3 سم ، $2\sqrt{3}$ سم ، $3\sqrt{3}$ سم
3. 1.5 سم ، 2 سم ، 2.5 سم

الحل

1. $\because$ طول أكبر ضلع فى المثلث = 11 سم

$\because (11)^2 = 121 \quad , \quad (9)^2 + (10)^2 = 81 + 100 = 181$

$\therefore (11)^2 < (9)^2 + (10)^2$

$\therefore$ المثلث حاد الزوايا.

2. $\because$ طول أكبر ضلع فى المثلث = $3\sqrt{3}$ سم

$(3\sqrt{3})^2 = 27, \quad (3)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12 = 21$

$\therefore (3\sqrt{3})^2 > (3)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$\therefore$ المثلث منفرج الزاوية.

3. $\because$ طول أكبر ضلع فى المثلث = 2.5 سم

$(2.5)^2 = 6.25, \quad (1.5)^2 + (2)^2 = 2.25 + 4 = 6.25$

$(2.5)^2 = (1.5)^2 + (2)^2$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية.



حاول بنفسك 5

عين نوع كل مثلث

بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

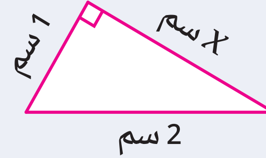
1. 5 سم ، 5 سم ، $5\sqrt{2}$ سم
2. 11سم ، 12 سم ، 16 سم
3. 4.5 سم ، 20 سم ، 21 سم

الحل

الواجب

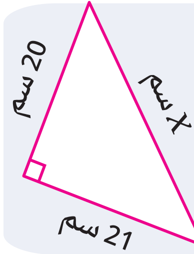
أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 فى الشكل المقابل :
ما مساحة المربع المنشأ على $\overline{AC}$ ؟



(أ) 4 سم^2 (ب) 2 سم^2 (جـ) 8 سم^2 (د) 10 سم^2

2 فى الشكل المقابل :
ما قيمة X ؟



(أ) 1 (ب) 3 (جـ) $\sqrt{5}$ (د) $\sqrt{3}$

3 فى الشكل المقابل :
ما قيمة X ؟

20 سم
X سم
21 سم

(أ) 41 (ب) 29 (جـ) $\sqrt{41}$ (د) $\sqrt{29}$

4 أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ؟

(أ) 7 , 7 , 4 (ب) 12 , 5 , 13
(جـ) 5 , 8 , 7 (د) 3 , 7 , 5

5 أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث حاد الزوايا ؟

(أ) $4 , 4 , 4\sqrt{2}$ (ب) 6 , 8 , 10
(جـ) 7.5 , 3.7 , 8 (د) 6 , 6 , 9

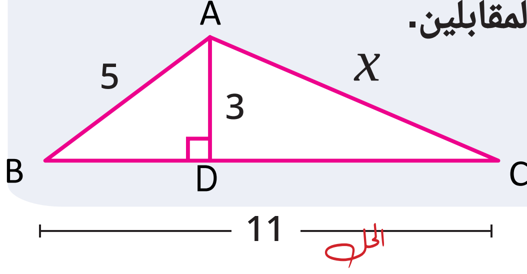
6 أي من الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث منفرج الزاوية ؟

(أ) 24 , 10 , 27 (ب) 2.5 , 2 , 1.5
(جـ) 7 , 7 , 7 (د) $20 , 10 , 10\sqrt{3}$

ثانياً المقالي

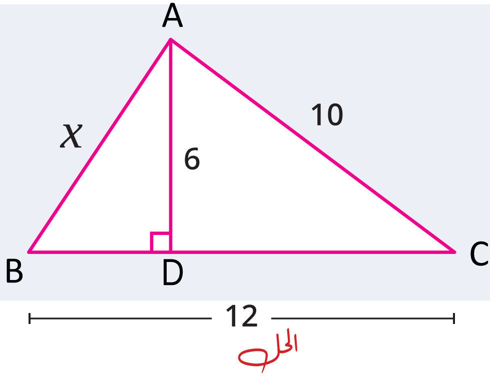
1 أوجد قيمة x فى كل من الشكلين المقابلين.

1



الحل

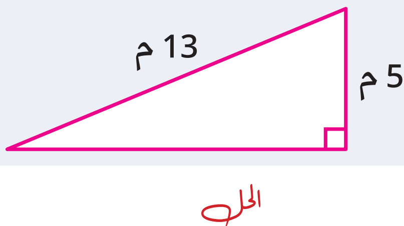
2



الحل

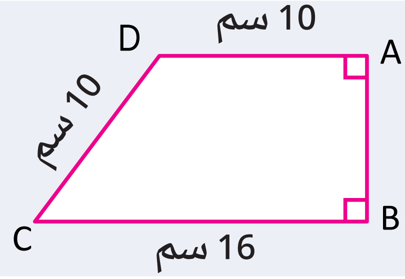
2 أوجد مساحة كل شكل من الشكلين.

1



الحل

2



الحل

3 عين نوع كل مثلث بالنسبة لزواياه إذا كانت أطوال أضلاعه كما يلى :

1 6 سم ، 3 سم ، 5 سم

الحل

2 $\sqrt{6}$سم، $\sqrt{5}$ سم ، $\sqrt{7}$ سم

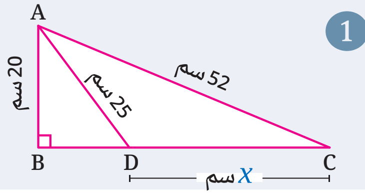
الحل

3 35سم، 28 سم، 21 سم

الحل

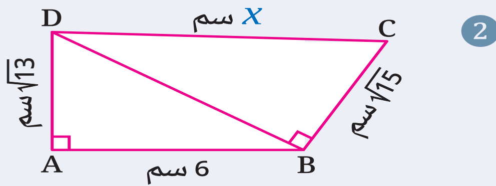
4 فى كل من الأشكال الآتية **أوجد قيمة** x :

1

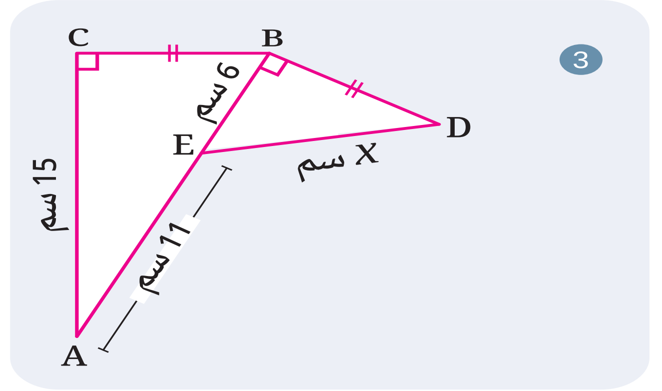


الحل

2



الحل

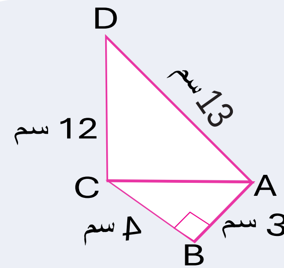


الحل

5 من الشكل

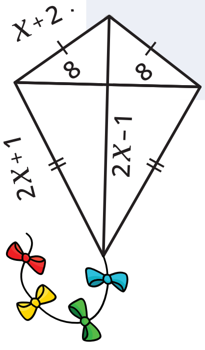
اثبت أن

قائم Δ ACD



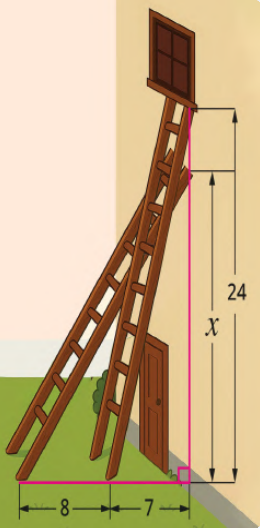
الحل

6 أمامك طائرة ورقية أبعادها كما بالشكل أوجد محيط الطائرة الورقية.



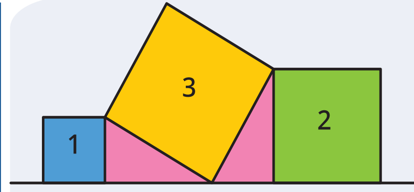
الحل

7 وضع رسام سلما للوصول إلى أسفل نافذة على ارتفاع 24 قدمًا عن الأرض، فكانت قاعدة السلم تبعد 7 أقدام عن حائط المنزل. أثناء خلطه للطلاء انزلق السلم ، مما أدى إلى ابتعاد قاعدته 8 أقدام أخرى عن حائط المنزل. ما الارتفاع الذى يصل إليه السلم حينئذ ؟



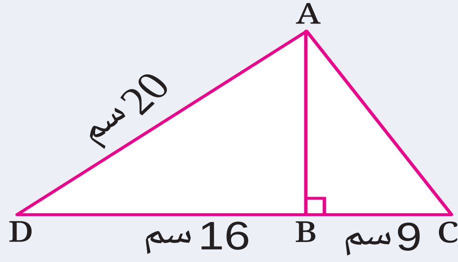
الحل

8 فى الشكل التالى :
ثلاثة مربعات،
مساحة المربع (1) = 16 سم^2
ومساحة المربع (2) = 48 سم^2
أوجد مع البرهان طول ضلع المربع (3)



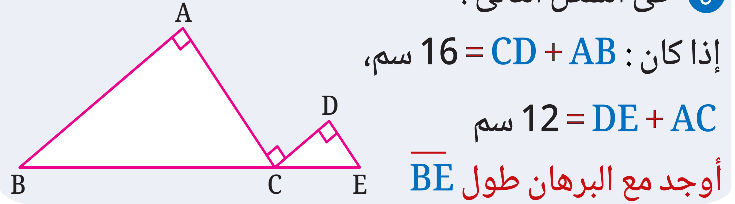
الحل

10 أوجد مع البرهان طول $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$



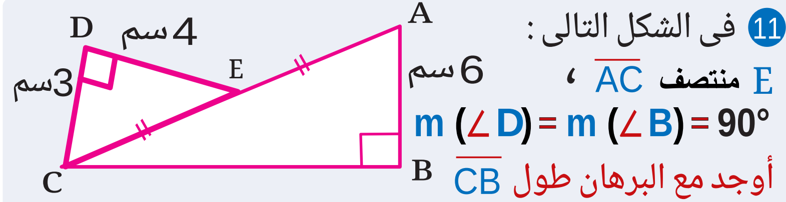
الحل

9 فى الشكل التالى :
إذا كان : $AB + CD = 16$ سم،
$AC + DE = 12$ سم
أوجد مع البرهان طول $\overline{BE}$



الحل

11 فى الشكل التالى :
E منتصف $\overline{AC}$ ،
$m(\angle D) = m(\angle B) = 90°$
أوجد مع البرهان طول $\overline{CB}$



الحل

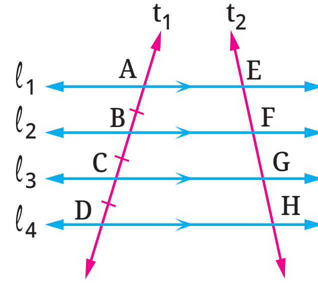
3 تطبيقات التوازى



تعلم !

بعض تطبيقات التوازى

نظرية (1): إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية ،وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأى قاطع آخر تكون متساوية فى الطول.



إذا كانت : $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$ ،

t_1 ، t_2 قاطعين لهم

بحيث $AB = BC = CD$

فإن : $EF = FG = GH$



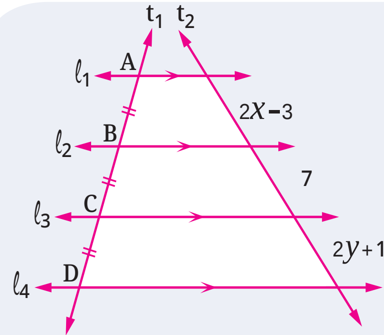
مثال 1

فى الشكل المقابل :

$\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$ ،

المستقيمان t_1 ، t_2 قاطعان لهم.

أوجد قيمة كل من x ،y .



الحل

$\because \ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$, $AB = BC = CD$

$\therefore 2x - 3 = 7 \quad \therefore 2x = 10 \quad \therefore x = 5$

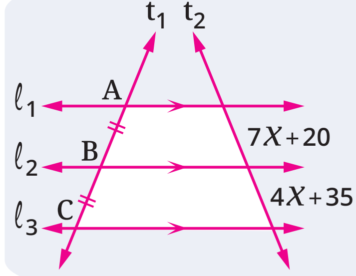
$\therefore 2y + 1 = 7 \quad \therefore 2y = 6 \quad \therefore y = 3$



حاول بنفسك 1

فى الشكل المقابل :

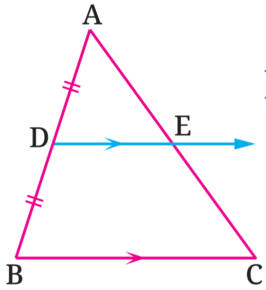
أوجد قيمة x .



الحل

بعض تطبيقات التوازى

نظرية (2): الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.



إذا كانت:

D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$

فإن : E نقطة منتصف $\overline{AC}$

أى أن : $AE = EC$

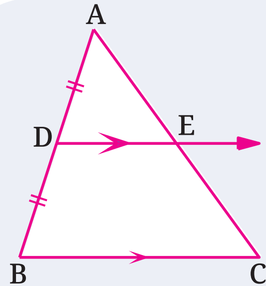


مثال 2

فى الشكل المقابل :

D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$ ،

$AC = 20$ سم ، أوجد طول $\overline{AE}$



الحل

$\because$ D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$

$\therefore AE = EC = 10$ سم

القطعة المتوسطة فى المثلث

القطعة المتوسطة فى المثلث

هى القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث.

إذا كانت : D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، E نقطة منتصف $\overline{AC}$.

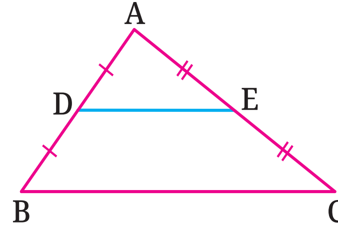


فإن : $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC

بعض تطبيقات التوازى

نظرية (3): القطعة المتوسطة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة متوسطة فى ΔABC



فإن : ① $\overline{DE} // \overline{BC}$

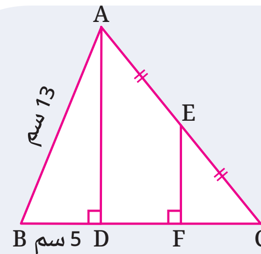
② $DE = \frac{1}{2} BC$



مثال 3

فى الشكل المقابل :

أوجد مع البرهان طول $\overline{EF}$



الحل

$\because$ المثلث ABD قائم الزاوية فى D

$\therefore (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$

$= (13)^2 - (5)^2 = 144$

$\therefore AD = \sqrt{144} = 12$

$\because m(\angle ADB) = m(\angle EFB) = 90°$

(وهما زاويتان فى وضع تناظر)

$\therefore \overline{AD} // \overline{EF}$

فى المثلث ADC :

$\because \overline{AD} // \overline{EF}$ ، E منتصف $\overline{AC}$ $\quad \therefore F$ منتصف $\overline{DC}$

$\therefore EF = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \quad \therefore EF = \frac{1}{2} AD$

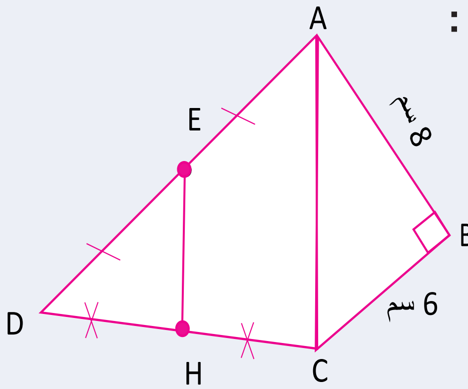
أى أن طول $\overline{EF} = 6$ سم.



حاول بنفسك 2

فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{EH}$



الحل

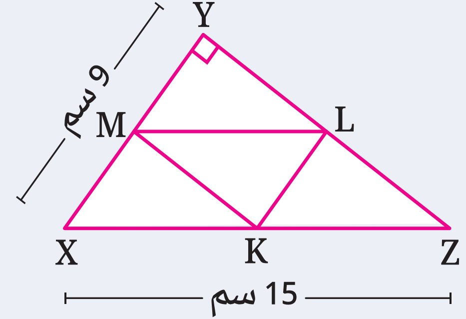


مثال 4

فى الشكل التالى :

أضلاع المثلث KLM هى القطع المتوسطة فى المثلث XYZ القائم الزاوية فى Y

احسب محيط المثلث KLM



الحل

أطول الأضلاع $\overline{XZ}$

$\because M(\angle Y) = 90^\circ$

$\therefore YZ = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$

$\because$ $\overline{ML}$ ، $\overline{KL}$ ، MK القطع المتوسطة في Δ XYZ

$\therefore ML = \frac{1}{2} \times XZ =$ 7.5 سم

$KL = \frac{1}{2} \times XY =$ 4.5 سم

$Mk = \frac{1}{2} \times YZ =$ 6 سم

$\therefore$ محيط Δ = 7.5 + 4.5 + 6 = 18 سم

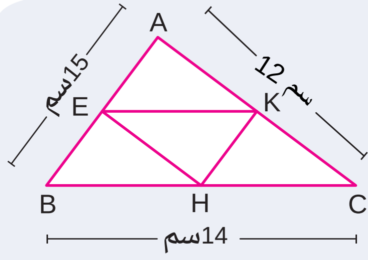


حاول بنفسك 2

فى الشكل التالى :

$\overline{HK}$, $\overline{EK}$, $\overline{EH}$ القطع المتوسطة للمثلث ABC

أوجد محيط ΔABC



الحل



شغل دماغك

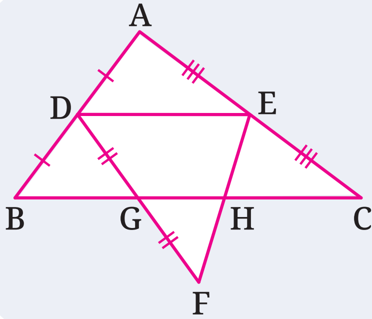
فى الشكل المقابل :

إذا كانت D منتصف $\overline{AB}$،

E منتصف $\overline{AC}$،

G منتصف $\overline{DF}$،

برهن أن BC = 4 GH



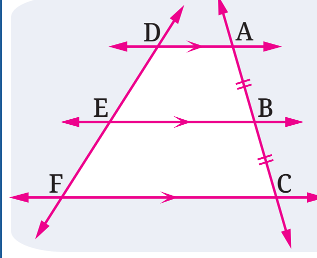
الحل



الواجب

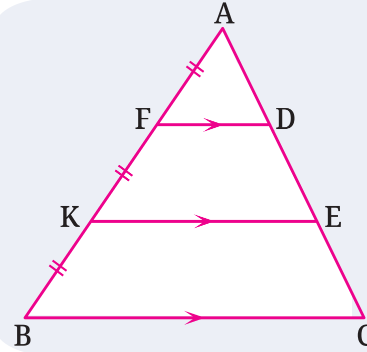
أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 فى الشكل المقابل :
إذا كان طول $\overline{DF} = 15$ سم
ما طول $\overline{EF}$ ؟



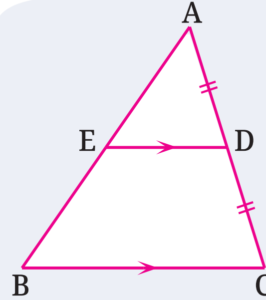
(أ) 10 سم (ب) 7.5 سم (جـ) 5 سم (د) 2.5 سم

2 فى الشكل المقابل :
إذا كان : $AC = 12$ سم
فما طول $\overline{AE}$ ؟



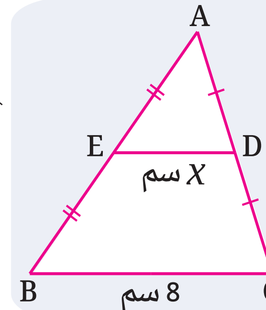
(أ) 3 سم (ب) 4 سم (جـ) 6 سم (د) 8 سم

3 فى الشكل المقابل :
إذا كان طول $\overline{EB} = 10$ سم
ما طول $\overline{AB}$ ؟



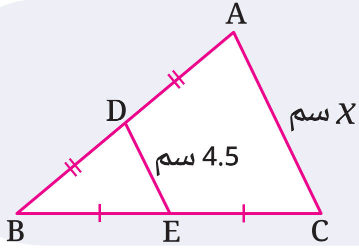
(أ) 20 سم (ب) 10 سم (جـ) 7.5 سم (د) 5 سم

4 فى الشكل المقابل :
ما قيمة X ؟



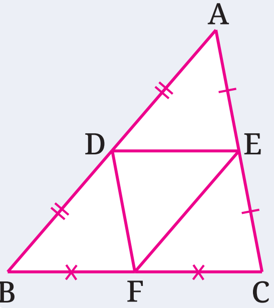
(أ) 16 (ب) 8 (جـ) 4 (د) 2

5 فى الشكل المقابل :
ما قيمة X ؟



(أ) 9 (ب) 4.5 (جـ) 13.5 (د) 2.25

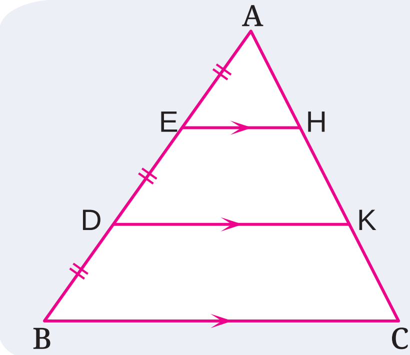
6 فى الشكل المقابل :
إذا كان محيط ΔABC
يساوى 18 سم
فما محيط ΔDEF ؟



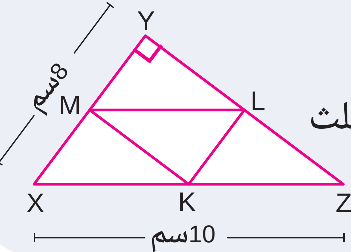
(أ) 6 سم (ب) 12 سم (جـ) 36 سم (د) 9 سم

ثانياً المقالي

1 فى الشكل المقابل :
إذا كان : $AC = 15$ سم
أوجدطول $\overline{AH}$ ؟
الحل

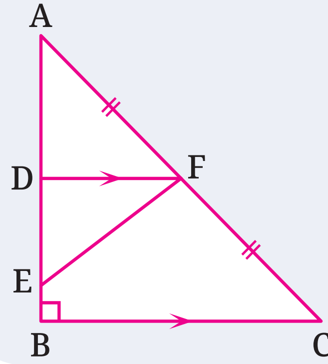


2 فى الشكل التالى :
أضلاع المثلث KLM
هى القطع المتوسطةفى المثلث
XYZ القائم الزاوية فى Y
احسب محيط المثلث KLM



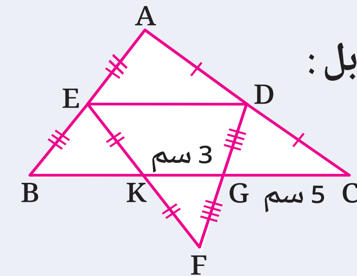
الحل

3 فى الشكل التالى :
AB = BC = 16 سم
EB = 2 سم
أوجد طول $\overline{EF}$



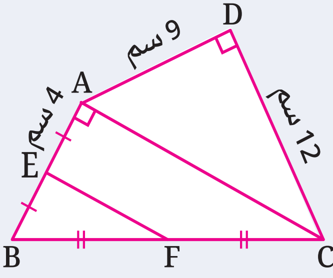
الحل

4 فى الشكل المقابل :
أوجد مع البرهان
طول $\overline{BK}$



الحل

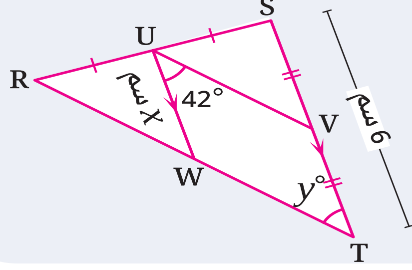
5 فى الشكل المقابل :
ABCD شكل رباعى فيه
E , F منتصفا $\overline{AB}$, $\overline{BC}$
على الترتيب.
أوجد مساحة Δ BEF



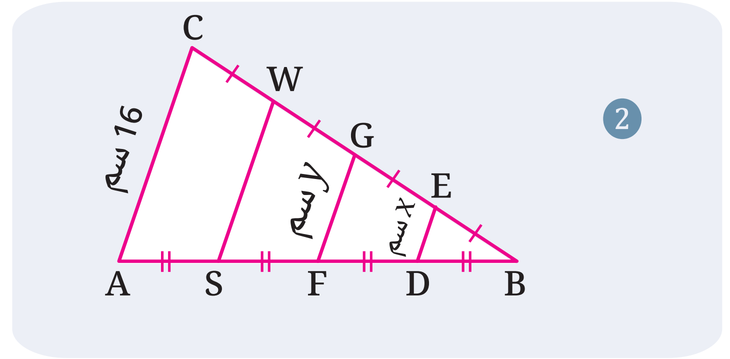
الحل

6 فى كل من الأشكال الآتية
أوجد قيمة كل من x ، y

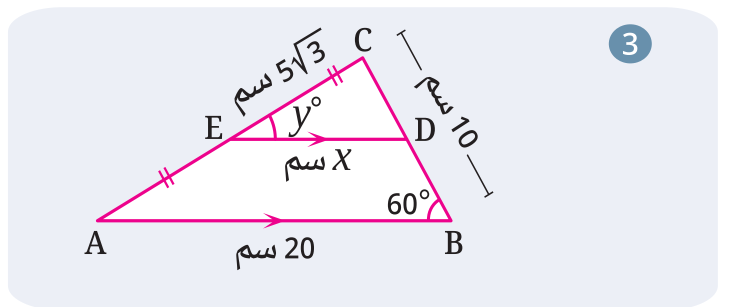
1



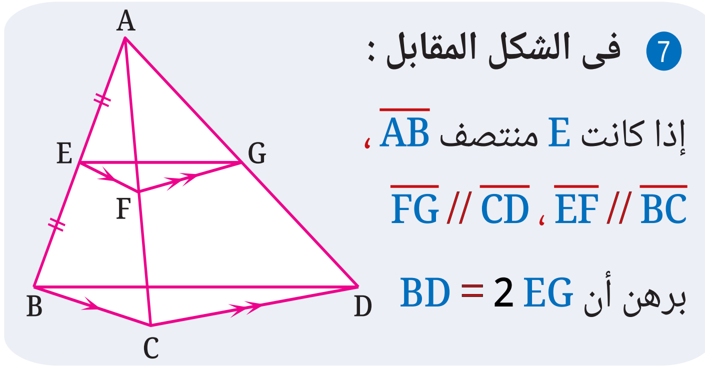
الحل



الحل



الحل

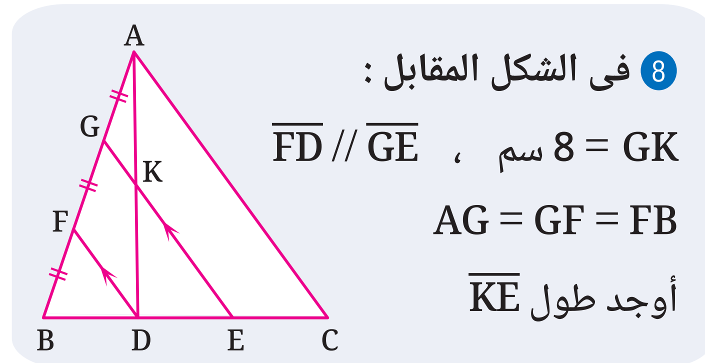


7 فى الشكل المقابل :

إذا كانت E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{FG} // \overline{CD}$ ، $\overline{EF} // \overline{BC}$

برهن أن $BD = 2\,EG$

الحل



8 فى الشكل المقابل :

$\overline{FD} // \overline{GE}$ ، $GK = 8$ سم

$AG = GF = FB$

أوجد طول $\overline{KE}$

الحل

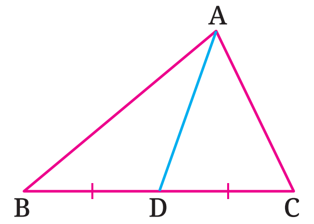
4 متوسطات المثلث



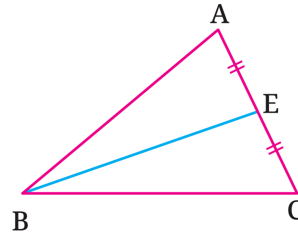
تعلم !

متوسط المثلث

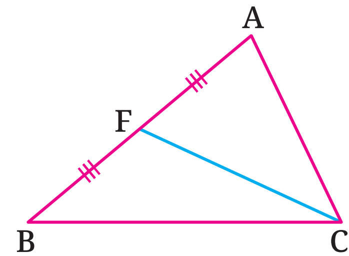
متوسـط المثلث هو قطعة مسـتقيمة مرسـومة من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. كل مثلث له ثلاثة متوسطات كالتالى :



المتوسط $\overline{AD}$ المرسوم من الرأس A



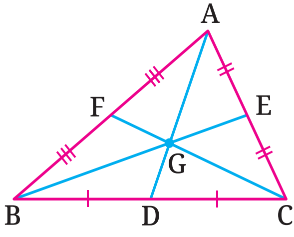
المتوسط $\overline{BE}$ المرسوم من الرأس B



المتوسط $\overline{CF}$ المرسوم من الرأس C

نظرية (1): متوسطات المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

فى الشكل المقابل :



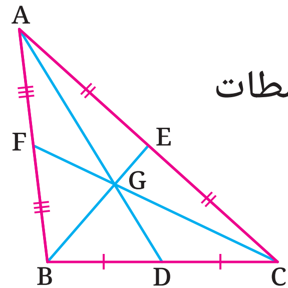
إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ متوسطات المثلث ABC

فإن : $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

أى أن : النقطة G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC

نظرية (2): نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس.

فى الشكل المقابل :

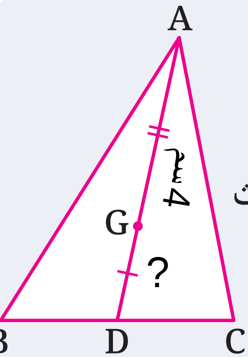


إذا كانت G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC فإن :

$GD = \frac{1}{3} AD$ ،

$AG = \frac{2}{3} AD$ ، $AG = 2\,GD$

مثال 1



1 فى الشكل المقابل :

G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC فإن طول DG

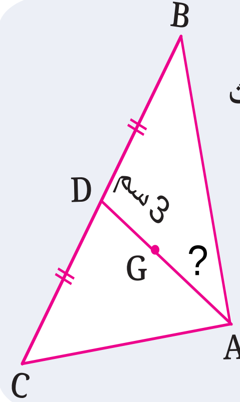


∵ G هى نقطة تقاطع متوسطات

$\therefore GD = \frac{1}{2} AG =$ 2 سم

2 فى الشكل المقابل :

G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC فإن طول AG



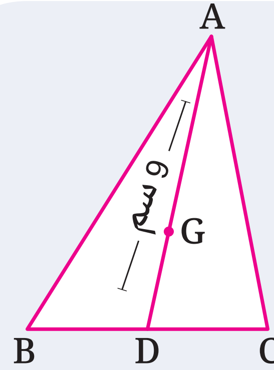
الحل

∵ G هى نقطة تقاطع متوسطات

$\therefore AG = 2\,GD = 6$ سم

3 فى الشكل المقابل :

G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC فإن طول AG ، GD



الحل

∵ G هى نقطة تقاطع متوسطات

$\therefore GD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \times 9 = 3$ سم

$\therefore AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ سم

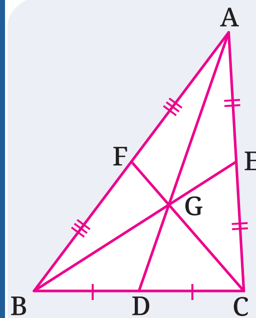


مثال 2

فى الشكل المقابل :

G هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان : AG = 8 سم ، GE = 3.5 سم ، CF = 7.5 سم

أوجد طول كل من $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CG}$



الحل

- $AD = \frac{3}{2}AG = \frac{3}{2} \times 8 = 12$ سم
- $BE = 3\,GE = 3 \times 3.5 = 10.5$ سم
- $CG = \frac{2}{3}CF = \frac{2}{3} \times 7.5 = 5$ سم

أى أن : طول $\overline{AD} = 12$ سم ، طول $\overline{BE} = 10.5$ سم ، طول $\overline{CG} = 5$ سم



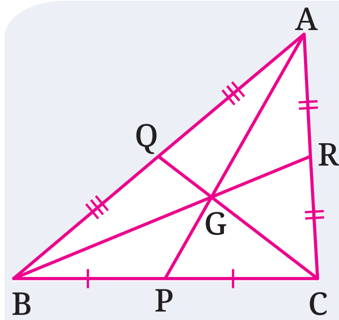
حاول بنفسك 1

1 فى الشكل التالى :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان AP = 21 سم ، GQ = 5 سم، BG = 16 سم.

أوجد طول كل من :

$\overline{PG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BR}$



الحل

2 في الشكل التالى :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان BC = 8 سم ، BG = 4 سم، CG = 6 سم.

أوجد محيط المثلث GDH

الحل

نظرية (3): طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.

في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا مرسومًا من رأس القائمة B فإن :

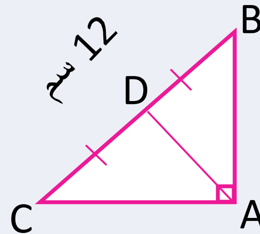
$BD = AD = DC = \frac{1}{2} AC$



مثال 2

المثلث ABC قائم في A

1 أوجد AD

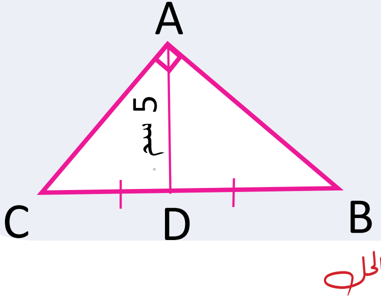


الحل

$\because m(\angle A) = 90^\circ$ ، D منتصف CB

$\therefore AD = \frac{1}{2} CB = 6$ سم

2 أوجد CB

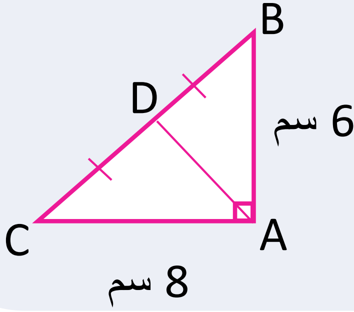


الحل

$\because m(\angle A) = 90^\circ$ ، D منتصف CB

$\therefore CB = 2\,AD = 10$ سم

3 أوجد AD



الحل

$\because m(\angle A) = 90^\circ$

$(CB)^2 = 64 + 36 = 100$

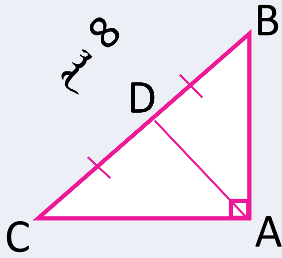
$(CB) = \sqrt{100} = 10$

$\therefore AD = \frac{1}{2} CB = 6$ سم



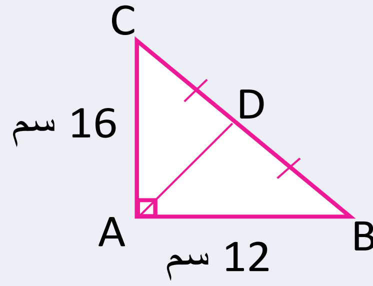
حاول بنفسك 2

1 أوجد AD



الحل

2 أوجد $\overline{AD}$

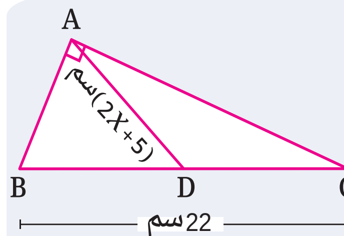


الحل



مثال 3

في الشكل التالى :
المثلث ABC قائم الزاوية في A ، $\overline{AD}$ متوسط فيه.
أوجد قيمة X ؟



الحل

∵ $\overline{AD}$ متوسط في المثلث ABC وخارج من رأس القائمة

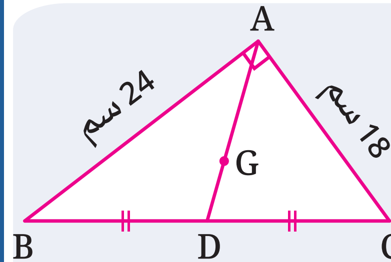
$\therefore AD = \frac{1}{2} BC \qquad \therefore 2X + 5 = 11$

$\therefore 2X = 11 - 5 = 6 \qquad \therefore X = 3$



حاول بنفسك 3

في الشكل التالى :
G هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC القائم الزاوية في A أوجد طول $\overline{AG}$

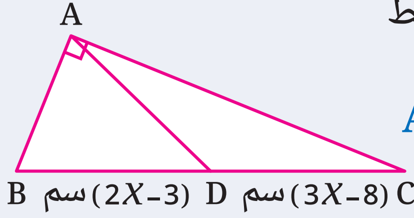


الحل



حاول بنفسك 4

في الشكل التالى :
إذا كان $\overline{AD}$ متوسط في المثلث ABC القائم الزاوية في A



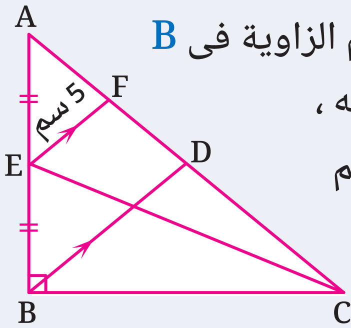
أوجد طول $\overline{AD}$

الحل



مثال 4

في الشكل التالى :
إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية في B
$\overline{CE}$ ، $\overline{BD}$ متوسطين فيه ،
$\overline{EF} // \overline{BD}$ ، $EF = 5$ سم
أوجد طول $\overline{AC}$



الحل

في المثلث ABD :

∵ E منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{EF} // \overline{BD}$ ∴ F منتصف $\overline{AD}$

$\therefore EF = \frac{1}{2} BD \qquad \therefore BD = 2 \times 5 = 10$

∵ $\overline{BD}$ متوسط في المثلث ABC القائم الزاوية في B

$\therefore BD = \frac{1}{2} AC \qquad \therefore AC = 2 \times 10 = 20$

أي أن طول $\overline{AC}$ يساوي 20 سم.



حاول بنفسك 5

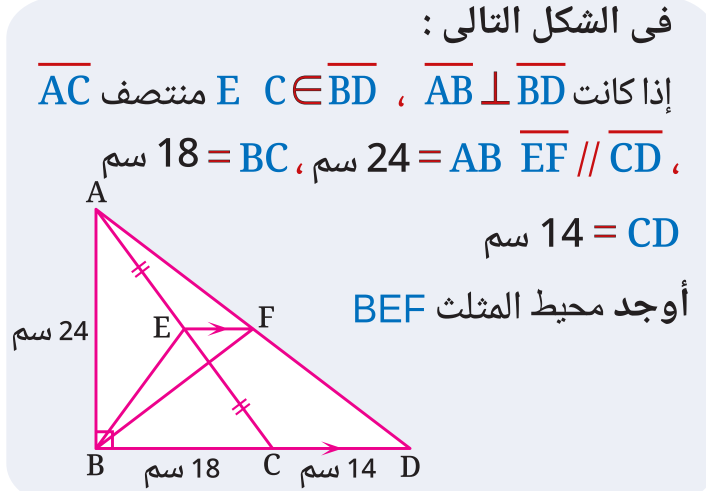
فى الشكل التالى :

إذا كانت $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ ، $C \in \overline{BD}$ E منتصف $\overline{AC}$

، $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ AB = 24 سم ، BC = 18 سم

CD = 14 سم

أوجد محيط المثلث BEF



الحل

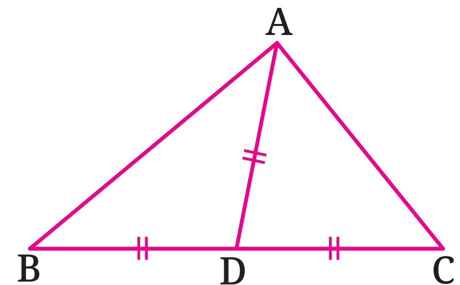
عكس نظرية (3): إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس ، فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$ متوسطًا مرسومًا من الرأس A ،

وكان : $AD = BD = CD = \frac{1}{2} BC$

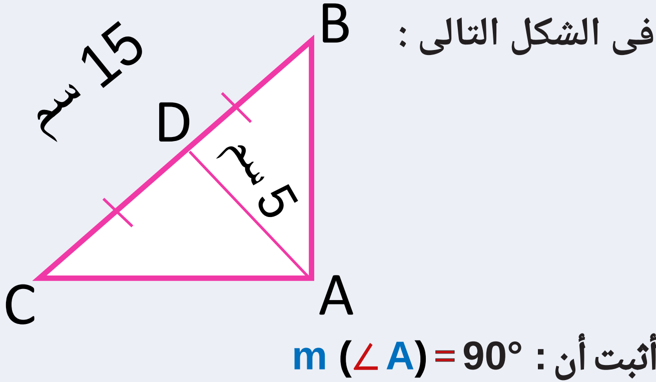
فإن : $m(\angle BAC) = 90°$





مثال 5

فى الشكل التالى :



أثبت أن : $m(\angle A) = 90°$

الحل

$\because$ D منتصف CB $\therefore$ $\overline{AD}$ متوسط

$\because$ AD = 5 , $\because$ CB = 10

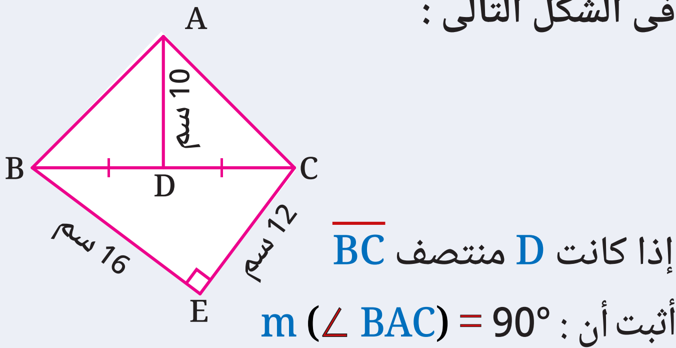
$\therefore AD = \frac{1}{2} CB$

$\therefore m(\angle A) = 90°$



حاول بنفسك 6

فى الشكل التالى :



إذا كانت D منتصف $\overline{BC}$

أثبت أن : $m(\angle BAC) = 90°$

الحل

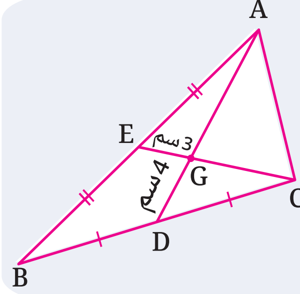


الواجب

أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 في الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، $GE = 3$ سم ، $GD = 4$سم فأي مما يلي صحيح ؟



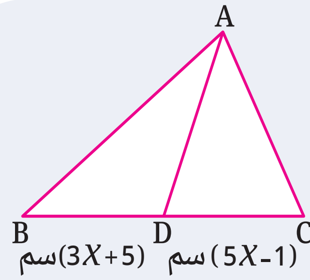
(أ) $AG = 6$ سم (ب) $CG = 8$ سم

(جـ) $CE = 9$ سم (د) $AG = 12$ سم

2 في الشكل المقابل :

$\overline{AD}$ متوسط في المثلث ABC

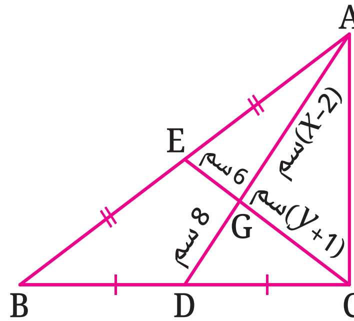
ما طول $\overline{BC}$ ؟



(أ) 3 سم (ب) 6 سم (جـ) 14 سم (د) 28 سم

3 في الشكل المقابل :

$x - y =$ ....



(أ) 0

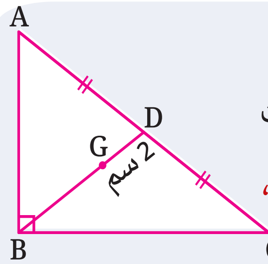
(ب) 7

(جـ) 14

(د) 29

4 في الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC القائم الزاوية في B ، $GD = 2$ سم، فما طول $\overline{AC}$ ؟



(أ) 8 سم (ب) 12 سم

(جـ) 18 سم (د) 24 سم

5 في الشكل المقابل :

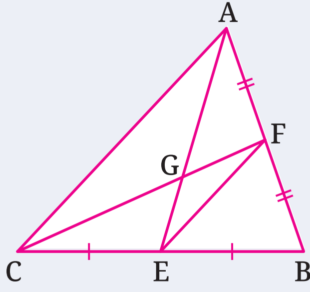
$\overline{AE}$, $\overline{CF}$ متوسطان في المثلث ABC ،

$\overline{AE} \cap \overline{CF} = \{G\}$

$CG = 12$ سم ،

$AE = 15$ سم ،

$AC = 20$ سم ، فما محيط المثلث GEF ؟

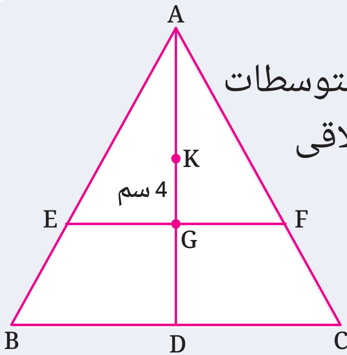


(أ) 18 سم (ب) 21 سم

(جـ) 24 سم (د) 27 سم

6 في الشكل المقابل :

إذا كانت G نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، K نقطة تلاقي متوسطات المثلث AEF فما طول $\overline{GD}$ ؟



(أ) 2 سم

(ب) 4 سم

(جـ) 6 سم

(د) 8 سم

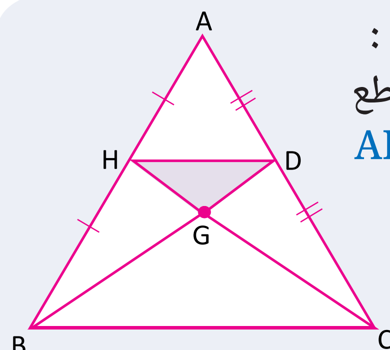
ثانياً المقالي

أولاً تمارين على نظرية 1 ، 2

1 فى الشكل التالى :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان CH = 15 سم ، BG = 10 سم، BC = 12 سم.

أوجد محيط المثلث HGD

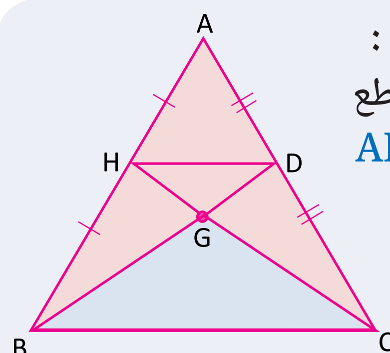


الحل

2 فى الشكل التالى :

إذا كانت G نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC وكان HD = 6 سم ، DG = 3 سم، HG = 4 سم.

أوجد محيط المثلث BGC



الحل

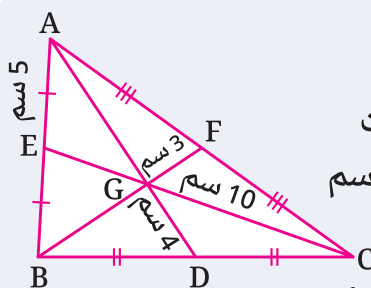
3 فى الشكل المقابل :

G نقطة تلاقى متوسطات المثلث ABC ، AE = 5 سم

CG = 10 سم

GD = 4 سم ، GF = 3 سم

أوجد بالبرهان مساحة المثلث ABD

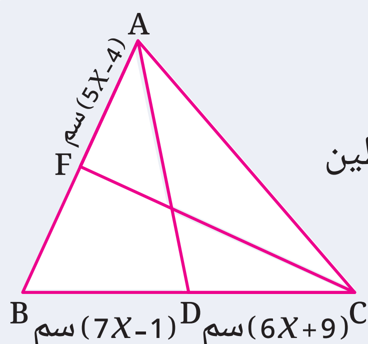


الحل

4 فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ متوسطين فى المثلث ABC

أوجد طول $\overline{FB}$



الحل

5 في الشكل المقابل :

إذا كانت E منتصف $\overline{AC}$ ، D منتصف $\overline{BC}$ ،

$\overline{AD} \perp \overline{BE}$ ، CE = 15 سم ، BG = 18 سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{AD}$

الحل

6 في الشكل المقابل :

G نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC ، DC = DG ،

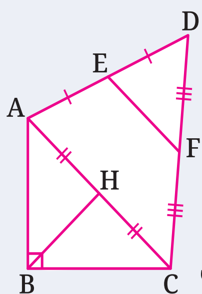
GF = 4 سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{BE}$

الحل

ثانياً تمارين على نظرية متوسطات Δ القائم

7 في الشكل المقابل :



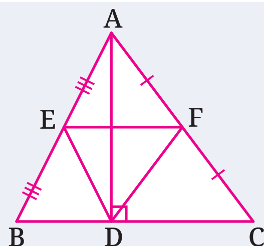
إذا كان $\overline{BH}$ متوسطًا في المثلث ABC القائم الزاوية في B

، E , F منتصفي $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ على الترتيب

أثبت أن : BH = EF

الحل

8 في الشكل المقابل :



ABC مثلث فيه $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

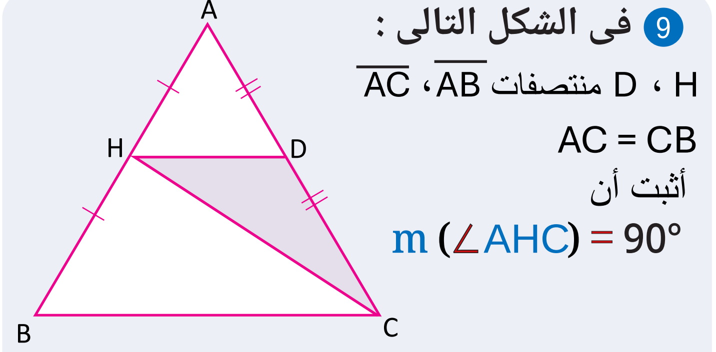
E , F منتصفي $\overline{AC}$, $\overline{AB}$

على الترتيب.

أثبت أن : محيط المثلث EFD = $\frac{1}{2}$ محيط المثلث ABC

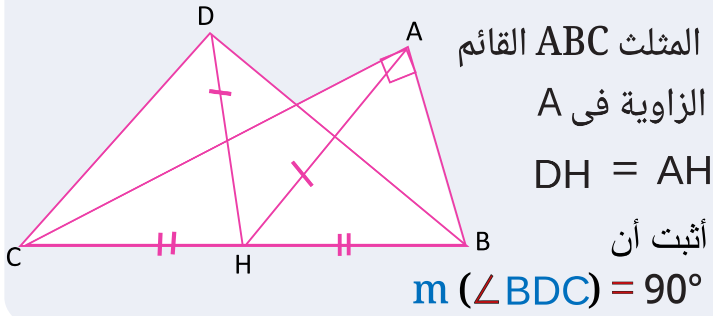
الحل

9 فى الشكل التالى :
H ، D منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$
AC = CB
أثبت أن
$m(\angle AHC) = 90°$



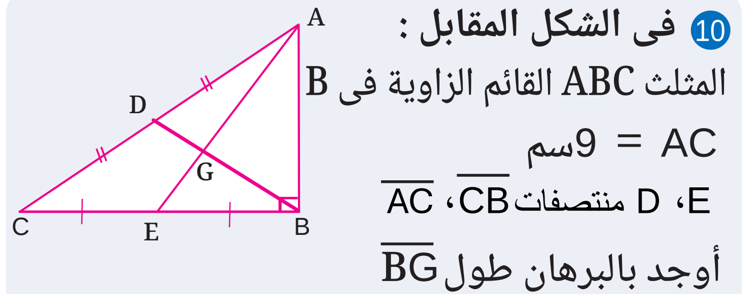
الحل

7 فى الشكل المقابل
المثلث ABC القائم
الزاوية فى A
DH = AH
أثبت أن
$m(\angle BDC) = 90°$



الحل

10 فى الشكل المقابل :
المثلث ABC القائم الزاوية فى B
AC = 9سم
E، D منتصفات $\overline{CB}$ ، $\overline{AC}$
أوجد بالبرهان طول $\overline{BG}$



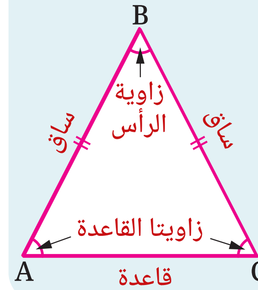
الحل

5 المثلث المتساوى الساقين


تعلم !

المثلث المتساوى الساقين

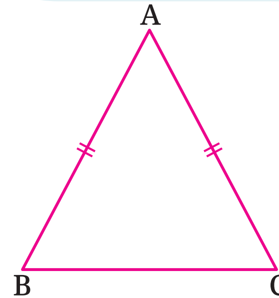
المثلث المتساوى الساقين هو مثلث يحتوى على ضلعين متطابقين.



- يُسمى الضلعان المتطابقان ساقى المثلث.
- تُسمى الزاوية المحصورة بينهما زاوية الرأس.
- تُسمى الزاويتان الأخريان زاويتى القاعدة.

المثلث المتساوى الساقين

نظرية(1): زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.



فى المثلث ABC :

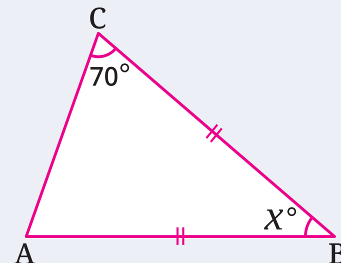
إذا كانت : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

فإن : $\angle B \cong \angle C$


مثال 1

أوجد قيمة X فى كل من الشكلين الآتيين :

1



الحل

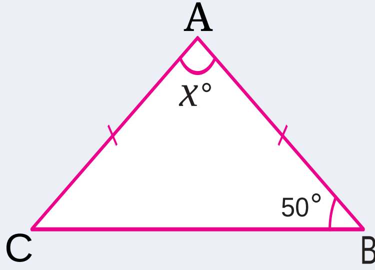
$\because \overline{AB} \cong \overline{CB} \qquad \therefore \angle A \cong \angle C$

$\therefore m(\angle A) = m(\angle C) = 70°$

$\therefore m(\angle B) = 180° - (70° + 70°) = 40°$

$\therefore X = 40$

2



الحل

$\because \overline{AC} \cong \overline{AB} \qquad \therefore \angle C \cong \angle B$

$\therefore m(\angle C) = m(\angle B) = 50°$

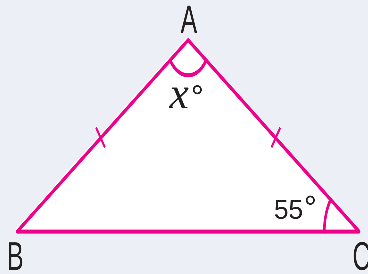
$\therefore m(\angle A) = 180° - (50° + 50°) = 80°$

$\therefore X = 80$


حاول بنفسك 1

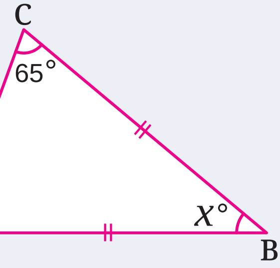
أوجد قيمة X فى كل من الشكلين الآتيين :

1



الحل

2



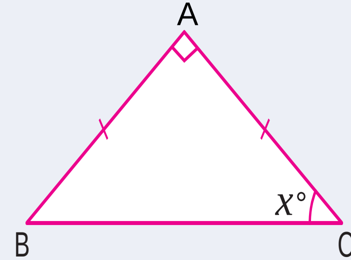
الحل



مثال 2

أوجد قيمة X فى كل من الشكلين الآتيين :

1

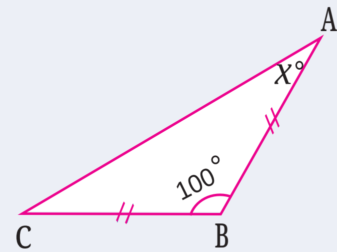


الحل

$\because \overline{AB} \cong \overline{AC} \qquad \therefore \angle B \cong \angle C$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle C) = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$

2



الحل

$\because \overline{BC} \cong \overline{BA} \qquad \therefore \angle C \cong \angle A$

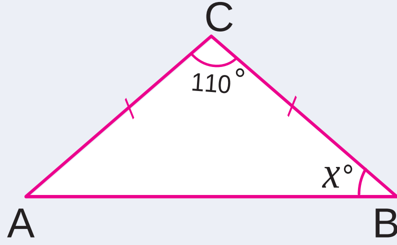
$\therefore m(\angle C) = m(\angle A) = \dfrac{180° - 100°}{2} = 40°$



حاول بنفسك 2

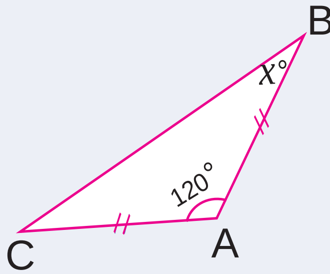
أوجد قيمة X فى كل من الشكلين الآتيين :

1



الحل

2



الحل

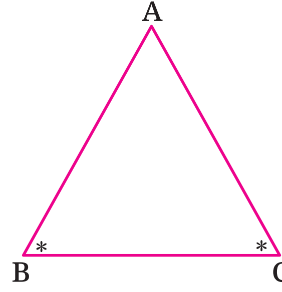
المثلث المتساوى الساقين

عكس نظرية (2): إذا تطابقت زاويتان فى مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.

في المثلث ABC :

إذا كانت : $\angle B \cong \angle C$

فإن : $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

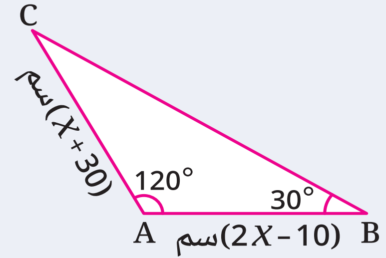




مثال 3

أوجد قيمة X فى كل من الشكلين الآتيين :

1



الحل

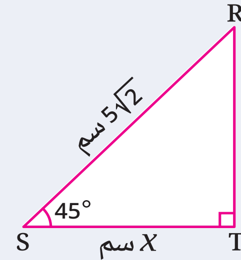
$\because m(\angle C) = 180° - (120° + 30°) = 30°$

$\therefore \angle C \cong \angle B \qquad \therefore \overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\therefore 2X - 10 = X + 30$

$\therefore 2X - X = 30 + 10 \qquad \therefore X = 40$

2



الحل

$\because$ المثلث RST قائم الزاوية فى T

$\therefore m(\angle R) = 180° - (45° + 90°)$

$m(\angle R) = 45° \quad \therefore m(\angle R) = m(\angle S)$

$\therefore ST = TR = X$

من نظرية فيثاغورث

$X^2 + X^2 = (5\sqrt{2})^2$

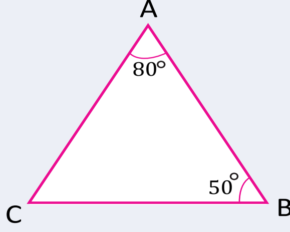
$2X^2 = 50 \quad \therefore X^2 = 25 \quad \therefore X = \sqrt{25} = 5$ سم



حاول بنفسك 3

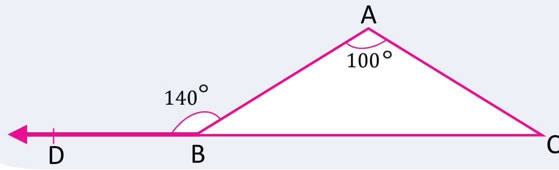
أثبت ان Δ ABC متساوي الساقين

1



الحل

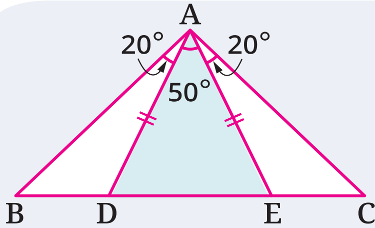
2



الحل



مثال 4



فى الشكل المقابل :

$E \in \overline{BC}$ ، $D \in \overline{BC}$

أثبت أن المثلث ABC متساوى الساقين.

الحل

فى المثلث ADE :

$\because \overline{AD} \cong \overline{AE}$

$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle AED)$

$= \frac{180° - 50°}{2} = 65°$

$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle AEC)$

$= 180° - 65° = 115°$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle C)$

$= 180° - (20° + 115°) = 45°$

$\therefore \angle B \cong \angle C \qquad \therefore \overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\therefore$ المثلث ABC متساوى الساقين.



حاول بنفسك 4

فى الشكل التالى :

$AB = AC$, $m(\angle A) = 72^\circ$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

أثبت أن :

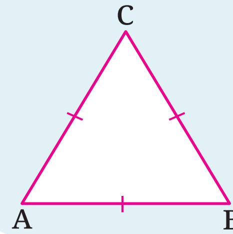
المثلث DBC متساوى الساقين.

الحل

المثلث المتساوى الأضلاع

المثلث المتساوى الأضلاع

هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.



نتيجة :

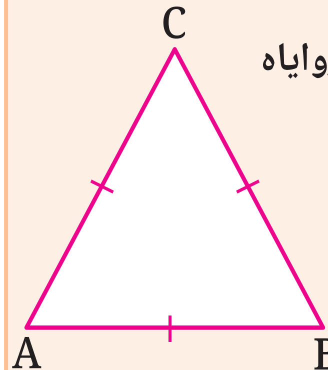
المثلث المتساوى الأضلاع زواياه الثلاث متطابقة.

فى المثلث ABC :

إذا كان :

$AB = AC = BC$

فإن : $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$



نتيجة :

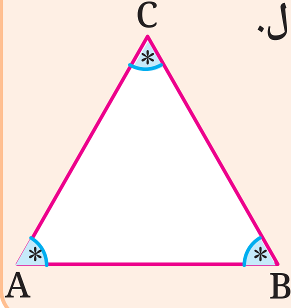
المثلث الذى زواياه الثلاث متطابقة أضلاعه متساوية فى الطول.

فى المثلث ABC :

إذا كانت :

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

فإن : $AB = AC = BC$





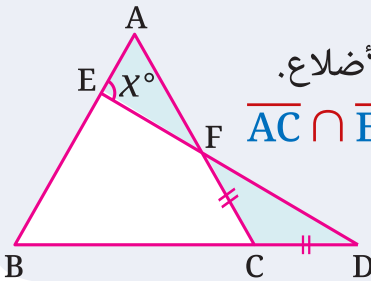
مثال 5

فى الشكل المقابل :

ABC مثلث متساوى الأضلاع.

$\overline{AC} \cap \overline{ED} = \{F\}$, $CF = CD$

أوجد قيمة X



الحل

$\because$ ΔABC متساوى الأضلاع.

$\therefore m(\angle ACB) = m(\angle A) = m(\angle B) = 60^\circ$

$\therefore m(\angle FCD) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\because$ ΔFCD متساوى الساقين فيه : $CF = CD$

$\therefore m(\angle D) = m(\angle CFD) = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\because$ $\angle AED$ خارجة عن المثلث EBD

$\therefore m(\angle AED) = m(\angle B) + m(\angle D)$

$= 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ \qquad \therefore X = 90$



حاول بنفسك 5

فى الشكل التالى :

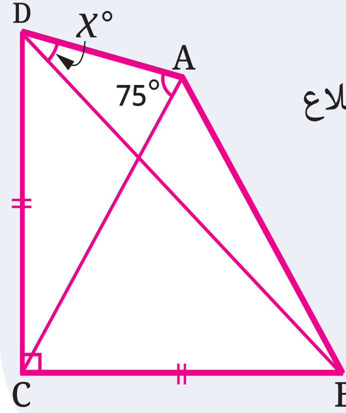
ABC مثلث متساوى الأضلاع

$BC = CD$

$m(\angle DAC) = 75°$

$m(\angle DCB) = 90°$

أوجد مع البرهان قيمة X .



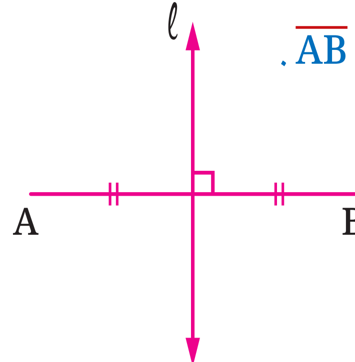
الحل

محور تماثل القطعة المستقيمة

محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من نقطة منتصفها.

إذا كان : المستقيم $\ell \perp \overline{AB}$ ، المستقيم ℓ ينصف $\overline{AB}$

فإن : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$.



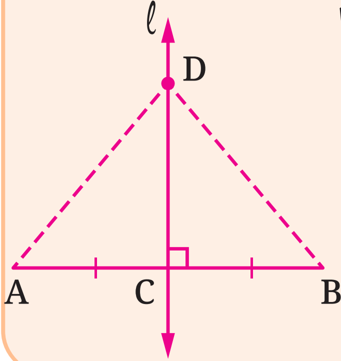
نتيجة :

النقطة التى تنتمى إلى محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

إذا كان : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$ ،

فإن : $D \in \ell$

$DA = DB$



نتيجة :

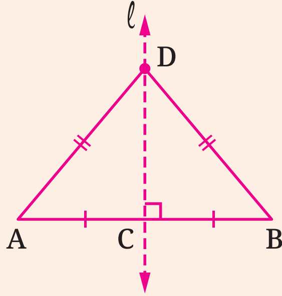
النقطة التى على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة تقع على محور تماثل هذه القطعة المستقيمة

إذا كان : المستقيم ℓ محور تماثل $\overline{AB}$ ،

$DA = DB$

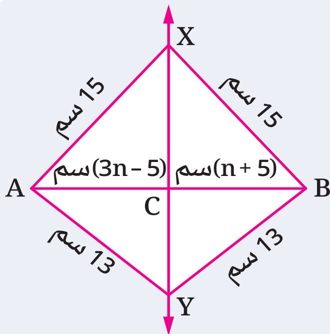
فإن :

$D \in \ell$



1 فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة n



الحل

$\because XA = XB = 15$

$\therefore$ X تقع على محور تماثل $\overline{AB}$

$\because YA = YB = 13$

$\therefore$ Y تقع على محور تماثل $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XY}$ محور تماثل $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{AB}$, $AC = CB$

$\therefore 3n - 5 = n + 5$

$\therefore 3n - n = 10 \quad \therefore 2n = 10$

$\therefore n = \frac{10}{2} = 5$

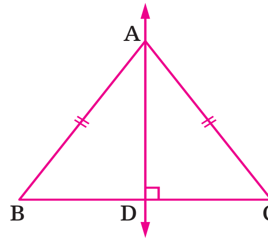
محور تماثل المثلث المتساوى الساقين

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو مستقيم يمر برأس المثلث وعمودى على قاعدته.

إذا كان : $AB = AC$,

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$

فإن : $\overleftrightarrow{AD}$ محور تماثل المثلث ABC



نتيجة :

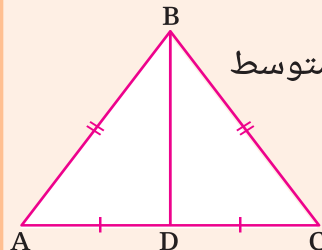
متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.

إذا كان : $AB = CB$, $\overline{BD}$ متوسط

فإن :

① $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

② $m(\angle ABD) = m(\angle CBD)$



نتيجة :

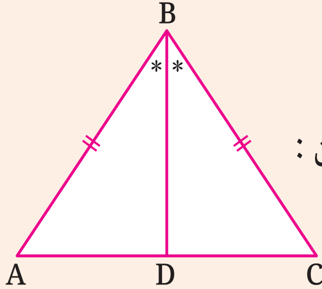
منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.

إذا كان : $AB = CB$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ فإن :

① $AD = CD$

② $\overline{BD} \perp \overline{AC}$



نتيجة :

المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلًا من القاعدة وزاوية الرأس.

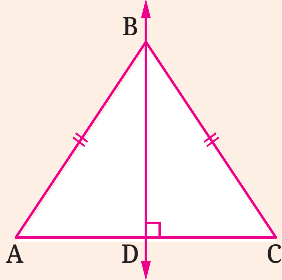
إذا كان :

$\overleftrightarrow{BD} \perp \overline{AC}$, $AB = CB$

فإن :

① $AD = DC$

② $m(\angle ABD) = m(\angle CBD)$

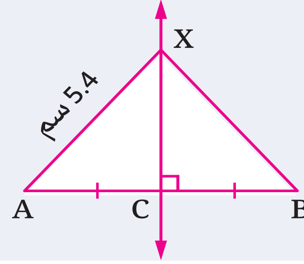


لاحظ أن

- المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد فقط.
- المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل.
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل.



مثال 6



1 فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{XB}$

الحل

$\because CA = CB$, $\overleftrightarrow{XC} \perp \overline{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{XC}$ محور تماثل $\overline{AB}$

$\because X \in \overleftrightarrow{XC}$

$\therefore XB = XA = 5.4$

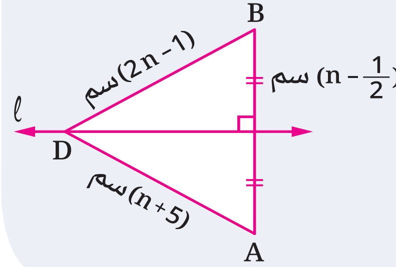
$\therefore$ طول $\overline{XB} = 5.4$ سم



حاول بنفسك 5

فى الشكل المقابل :

أوجد : $m(\angle A)$



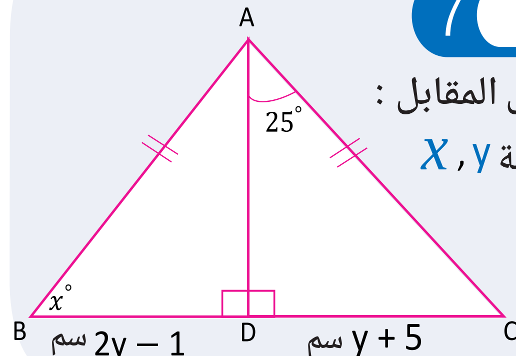
الحل



مثال 7

فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة x , y



الحل

$\because AC = AB$, $AD \perp BC$ $\therefore BD = DC$

$2y - 1 = y + 5$ $\therefore 2y - y = 1 + 5$ ، $y = 6$

$m(\angle DAC) = m(\angle BAD) = 25^{\circ}$

$\therefore m(\angle B) = 180 - (25 + 90) = 65^{\circ}$



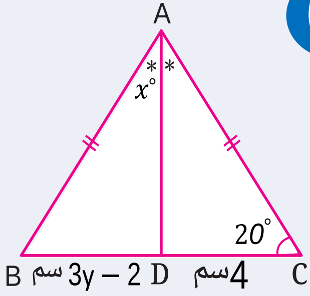
حاول بنفسك 6

1 فى الشكل المقابل :

$\because AC = AB$ ،

$\overline{AD}$ ينصف $\angle BAC$ فإن :

أوجد قيمة x , y

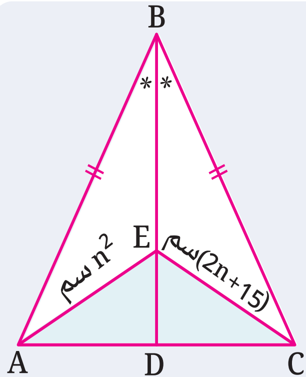


الحل

2 فى الشكل المقابل :

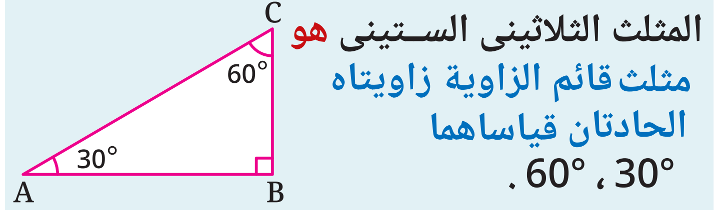
$E \in \overline{BD}$

أوجد قيمة n



الحل

المثلث الثلاثينى الستينى



المثلث الثلاثينى الســتينى **هو** مثلث قائم الزاوية زاويتاه الحادتان قياساهما 30° ، 60° .

نتيجة :

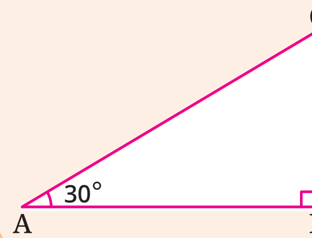
فى المثلث الثلاثينى الستينى طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها 30° **يساوى** نصف طول الوتر.

إذا كان :

ΔABC قائم الزاوية فى B ،

$m(\angle A) = 30°$

فإن : $BC = \frac{1}{2} AC$

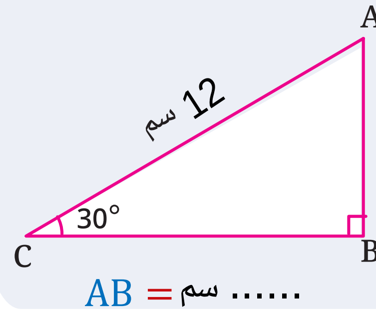




حاول بنفسك 7

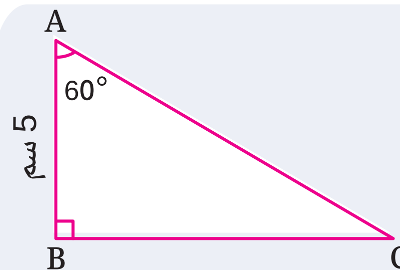
اكمل (شفوى على الطالبه) :

1



AB = ... سم

2



AC = ... سم

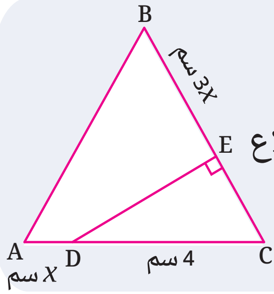


مثال 8

فى الشكل المقابل :

إذا كان ΔABC متساوى الأضلاع

فأوجد قيمة X



الحل

$\because \Delta ABC$ متساوى الأضلاع

$\therefore m(\angle C) = 60°$

$\because m(\angle DEC) = 90°$ $\therefore m(\angle EDC) = 30°$

$\therefore$ المثلث DEC ثلاثينى ستينى

$\therefore EC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$\because BC = AC$ $\therefore 3X + 2 = X + 4$

$\therefore 3X - X = 4 - 2$

$\therefore 2X = 2$ $\therefore X = 1$

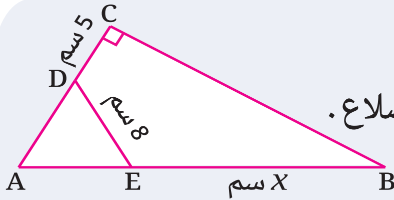


حاول بنفسك 8

فى الشكل التالى :

المثلث ADE متساوى الأضلاع.

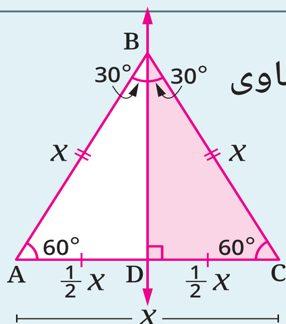
فأوجد قيمة X



الحل

لاحظ أن

محور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين، وكل منهما مثلث ثلاثينى ستينى.



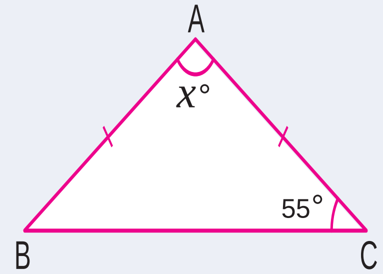


الواجب

أولاً واجب علي المثلث المتساوي الساقين

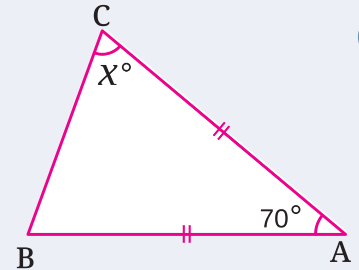
1 أوجد قيمة X

1



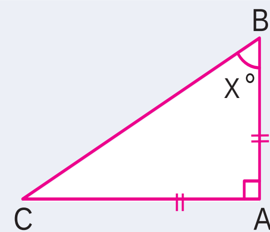
الحل

2



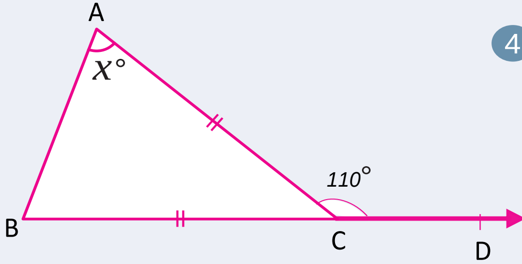
الحل

3



الحل

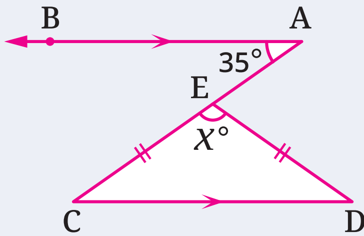
4



الحل

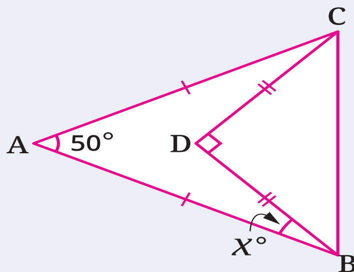
2 فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة X :

1



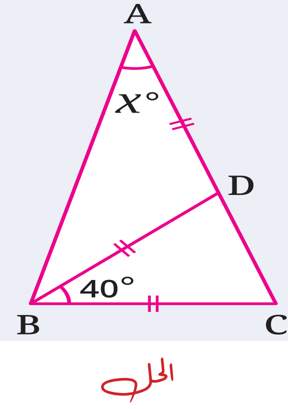
الحل

2



الحل

3



الحل

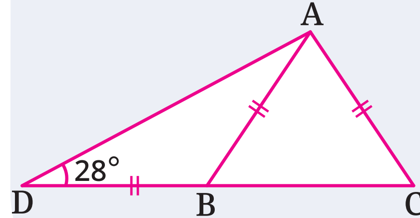
3 فى الشكل المقابل :

$B \in \overline{DC}$

$m(\angle D) = 28°$

أوجد مع البرهان

$m(\angle CAD)$



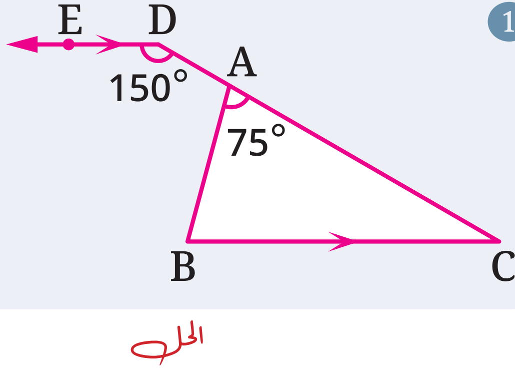
الحل

ثانياً واجب علي إثبات أن المثلث المتساوي الساقين

4 فى كل من الأشكال الآتية

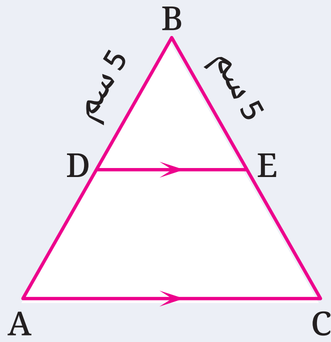
أثبت أن المثلث **ABC** متساوى الساقين :

1



الحل

2



الحل

3

B
D A C E

الحل

4

D A 60° 20° E B C

الحل

5 فى الشكل المقابل :

ABCD شكل رباعى

فيه $AB = AD$

$m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$

برهن أن : $BC = DC$

D A C B

الحل

6 فى الشكل المقابل :

$D \in \overrightarrow{CB}$

، $m(\angle DEB) = 35°$

$m(\angle A) = 40°$

$BE = BD$

أثبت أن : $AB = AC$

A 40° E 35° D B C

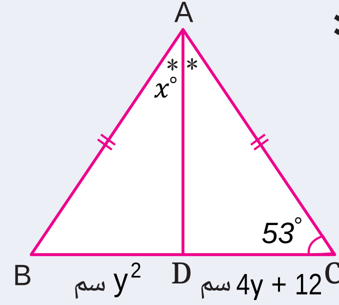
الحل

ثالثاً واجب على نتائج على المثلث المتساوي الساقين

7 فى الشكل المقابل :

$AB = AC$

أوجد قيمة X , y



الحل

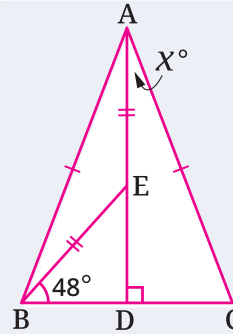
8 فى الشكل المقابل :

, $AB = AC$

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $EA = EB$

$m(\angle EBD) = 48°$

أوجد قيمة X



الحل

9 فى الشكل المقابل :

, $m(\angle DCB) = 20°$

$m(\angle B) = 30°$

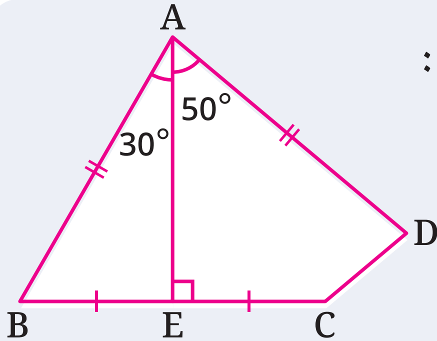
$CE = DE$, $\overline{AE} \perp \overline{CD}$

أوجد مع البرهان : $m(\angle CAE)$

الحل

10 فى الشكل المقابل :

أوجد $m(\angle D)$

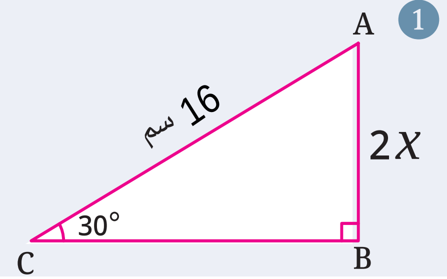


الحل

رابعاً واجب على المثلث الثلاثينى الستينى

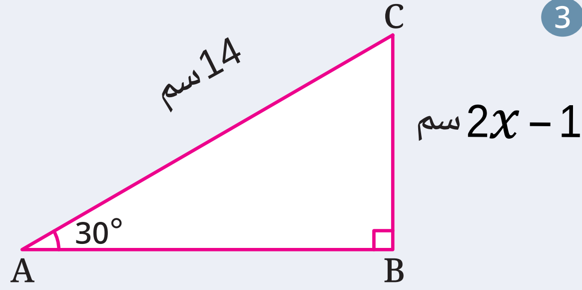
11 فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة X :

1



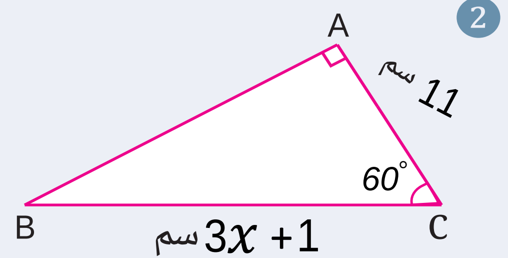
الحل

3



الحل

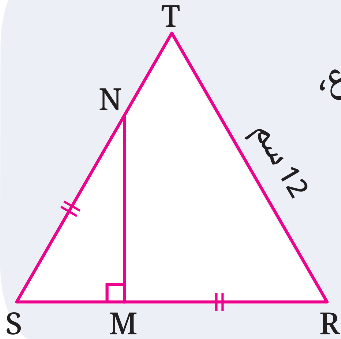
2



الحل

12 فى الشكل المقابل :

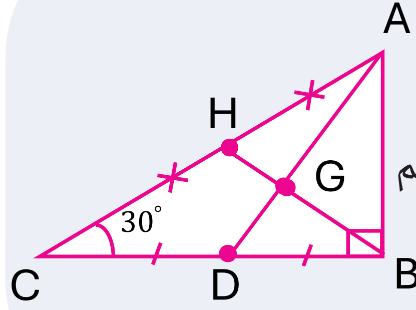
المثلث SRT متساوى الأضلاع،
وطول ضلعه 12 سم
$\overline{NM} \perp \overline{SR}$ ، MR = SN
أوجد مع البرهان طول $\overline{NM}$



الحل

13 فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{BH}$ ، $\overline{BG}$

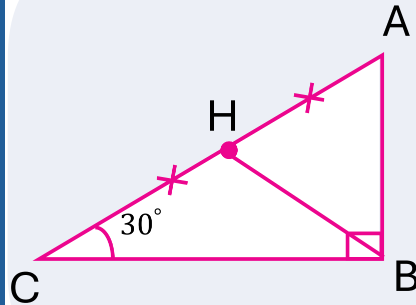


الحل

14 فى الشكل المقابل :

أثبت أن : مثلث ABH

متساوي الأضلاع



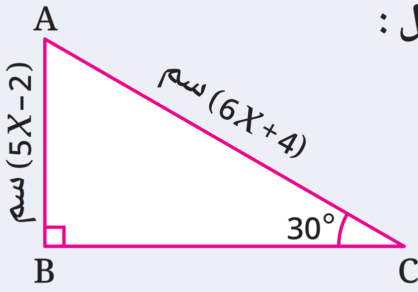
الحل

15 فى الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{AC}$ ،

ثم أوجد مساحة

المثلث ABC



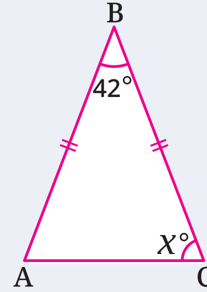
الحل

خامساً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 فى الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

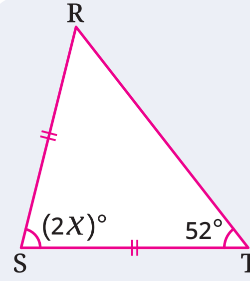


(أ) 42 (ب) 21

(ج) 69 (د) 84

2 فى الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟

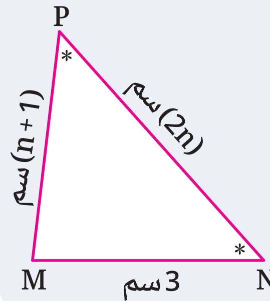


(أ) 26 (ب) 52

(ج) 76 (د) 38

3 فى الشكل المقابل :

ما طول $\overline{PN}$ ؟

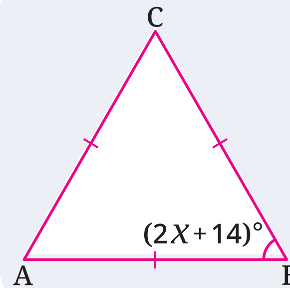


(أ) 8 سم (ب) 3 سم

(ج) 6 سم (د) 4 سم

4 فى الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟



(أ) 46 (ب) 23

(ج) 60 (د) 37

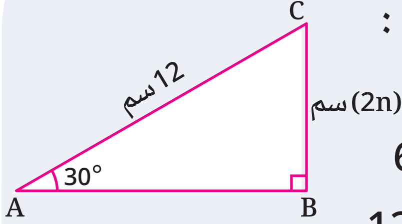
5 إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين 3 سم ، 7 سم، فما طول الضلع الثالث؟

(أ) 3 سم (ب) 4 سم

(ج) 7 سم (د) 10 سم

6 فى الشكل المقابل :

ما قيمة n ؟

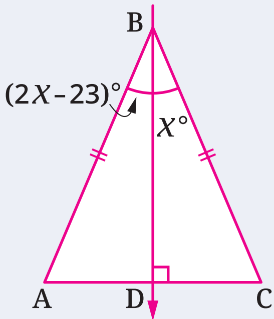


(أ) 3 (ب) 6

(ج) 9 (د) 12

7 فى الشكل المقابل :

ما قياس $\angle C$ ؟

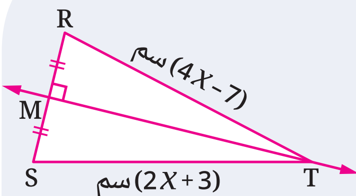


(أ) 23° (ب) 46°

(ج) 67° (د) 60°

8 فى الشكل المقابل :

ما قيمة X ؟



(أ) 7 (ب) 10

(ج) 5 (د) 3

6 الزوايا الداخلة والخارجة للمضلعات



تعلم !

الصيغة الرياضية لمجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع محدب

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع المحدب $= (n - 2) \times 180°$

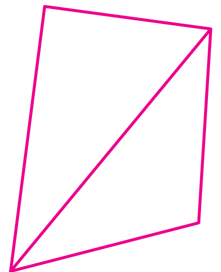
حيث n عدد أضلاع المضلع .

فمثلا :

- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الخماسي المحدب $= (5 - 2) \times 180° = 540°$
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الثماني المحدب $= (8 - 2) \times 180° = 1080°$

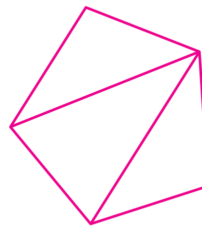
يمكن استنتاج الصيغة السابقة بملاحظة النمط التالي :

n = 4



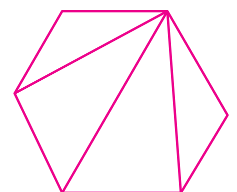
مثلثان

n = 5



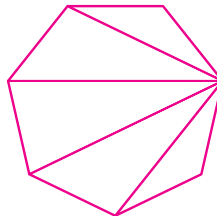
3مثلثات

n = 6



4مثلثات

n = 7



5مثلثات

- الأقطار المرسومة من أحد رؤوس المضلع تقسم المضلع إلى عدد من المثلثات $= (n - 2)$ مثلث.
- كل مثلث مجموع قياسات زواياه الداخلة $= 180°$.
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع $= 180° \times$ عدد المثلثات $= (n - 2) \times 180°$



مثال 1

في كل مما يأتي، أوجد عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة :

① $720°$ ② $1440°$

الحل

①
$(n - 2) \times 180° = 720°$

$\therefore n - 2 = \frac{720°}{180°} = 4$

$\therefore n = 4 + 2 = 6$

∴عدد أضلاع = 6 أضلاع

②
$(n - 2) \times 180° = 1440°$

$\therefore n - 2 = \frac{1440°}{180°} = 8$

$\therefore n = 8 + 2 = 10$

∴ عدد أضلاع = 10 أضلاع



ملاحظة

حل سريع ضيف للمجموع $360°$ وأقسم علي $180°$

في المثال السابق $n = \frac{720+360}{180}$

$n = 6$

يستخدم في حل الاختر



حاول بنفسك 1

ما عدد أضلاع المضلع المحدب الذي مجموع قياسات زواياه الداخلة ؟

(1) $1260°$ (2) $1800°$

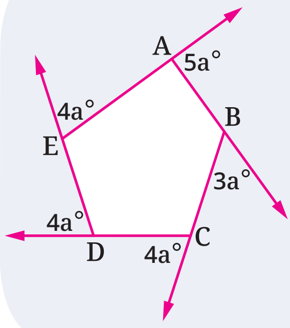
الحل



حاول بنفسك 2

في الشكل التالي :

أوجد : $m(\angle BCD)$



الحل

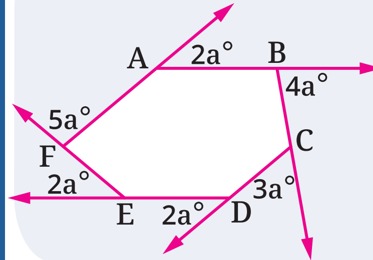


مثال 2

في الشكل المقابل :

أوجد : (1) قيمة a

(2) $m(\angle BCD)$



الحل

∵ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع المحدب $= 360°$

$$\therefore 2a° + 4a° + 3a° + 2a° + 2a° + 5a° = 360°$$

$$\therefore 18a = 360 \qquad \therefore a = \frac{360}{18} = 20$$

(المطلوب 1)

∴ قياس الزاوية الخارجة عند الرأس

$$60° = 3 \times 20° = C$$

$$\therefore m(\angle BCD) = 180° - 60° = 120°$$

(المطلوب 2)

الصيغة الرياضية لقياس زاوية المضلع المنتظم

فى المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه n ضلعا يكون :

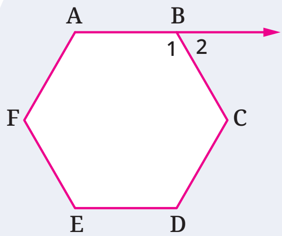
- قياس الزاوية الداخلة $= \frac{(n-2)\times 180°}{n}$
- قياس الزاوية الخارجة عند أحد رؤوسه $= \frac{360°}{n}$



مثال 3

الشكل المقابل

سداسى منتظم



الحل

- $m(\angle 1) = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$

$$= \frac{(6-2)\times 180°}{6} = 120°$$

- $m(\angle 2) = \frac{360}{n} = \frac{360}{6} = 60°$



مثال 4

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم فى كل مما يأتى :

1 إذا كان قياس إحدى زواياه الداخلة = 150°

2 إذا كان قياس إحدى زواياه الخارجة = 24°

الحل

1 ∵ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الداخلة = 150°

$$\therefore \frac{(n-2)\times 180^\circ}{n} = 150^\circ$$

$$\therefore 180^\circ n - 360^\circ = 150^\circ n$$

$$\therefore 180^\circ n - 150^\circ n = 360^\circ$$

$$\therefore 30^\circ n = 360^\circ \qquad \therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$$

∴ عدد أضلاع المضلع = 12 ضلعا

2 ∵ المضلع منتظم وقياس إحدى زواياه الخارجة = 24°

$$\therefore \frac{360^\circ}{n} = 24^\circ \qquad \therefore 24^\circ n = 360^\circ \qquad \therefore n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15$$

∴ عدد أضلاع المضلع = 15 ضلعا

حل آخر :

عدد أضلاع المضلع المنتظم = $\frac{360}{\text{قياس زاويته الخارجة}}$

= $\frac{360}{180 - \text{قياس زاويته الداخلة}}$

1 $n = \frac{360}{180-150} = \frac{360}{30} = 12$ ضلعا

2 $n = \frac{360}{24} = 15$ ضلعا



حاول بنفسك 3

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي

1 قياس زاويته الخارجة 40°

2 قياس زاويته الداخلة 108°

الحل

الصيغة الرياضية لعدد أقطار المضلع المحدب

عدد أقطار المضلع المحدب الذي عدد أضلاعه n ضلعا يساوي $\frac{n(n-3)}{2}$



مثال 5

أوجد عدد أقطار المضلع الثمانى المحدب

1 الثمانى المحدب

2 الخماسي المحدب

الحل

1 قطرا $\frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = 20$

2 أقطار $\frac{5(5-3)}{2} = 5$



حاول بنفسك 4

حاول بنفسك : أوجد عدد أقطار كل من

1 السداسي المحدب 2 السباعي المحدب

الحل



مثال 6

مضلع عدد أقطاره 35 قطر أوجد عدد أضلاعه

الحل

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35$$

$$n(n-3) = 70$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n-10)(n+3) = 0$$

$\therefore n = 10$ ، $n = -3$ مرفوضة



ملاحظة

$$n(n-3) = 70$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 70 والفرق بينهما 3

$\therefore \; 70 = 10 \times 7$ $\quad n = 10$ (الأكبر)

حل سريع :

بنضرب عدد الأقطار ×2 ونحلل العدد الناتج لعددين الفرق بينهم 3 وناخد العدد الأكبر



حاول بنفسك 5

حاول بنفسك : أوجد عدد أضلاع المضلع مضلع محدب عدد أقطاره

① 27 قطر ② 20 قطر

الحل



الواجب

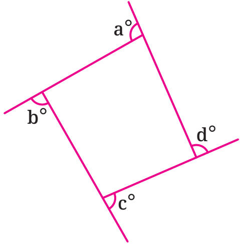
أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسي المحدب ؟

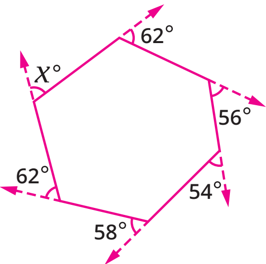
(أ) 900° (ب) 720° (ج) 540° (د) 360°

2. في الشكل المقابل:
ما قيمة $a+b+c+d$؟



(أ) 180 (ب) 360 (ج) 540 (د) 720

3. في الشكل المقابل
ما قيمة x ؟



(أ) 58 (ب) 62 (ج) 68 (د) 72

4. ما قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم ذي 18ضلعا ؟

(أ) 135° (ب) 144° (ج) 150° (د) 160°

5. ما عدد أضلاع المضلع المحدب الذى مجموع قياسات زواياه الداخلة 2340° ؟

(أ) 12 (ب) 13 (ج) 14 (د) 15

6. ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الداخلة 144 ° ؟

(أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 14

7. ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه الخارجة 20 ° ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 16 (د) 18

8. ما عدد أقطار المضلع السباعي المحدب ؟

(أ) 7 (ب) 11 (ج) 13 (د) 14

ثانياً المقالي

1 أوجد عدد أقطار مضلع محدب عدد أضلاعه

1 9 2 13 3 15

الحل

2 أوجد عدد أضلاع مضلع محدب منتظم إذا كان قياس زاويته الداخلة

1 $60°$ 2 $135°$ 3 $150°$

الحل

3 أوجد عدد أضلاع مضلع محدب إذا كان قياس زاويته الخارجة تساوي

1 $45°$ 2 $36°$ 3 $72°$

الحل

4 أوجد عدد أضلاع مضلع محدب إذا كان مجموع قياسات زواياه الداخلة

1 $1980°$ 2 $2340°$

الحل

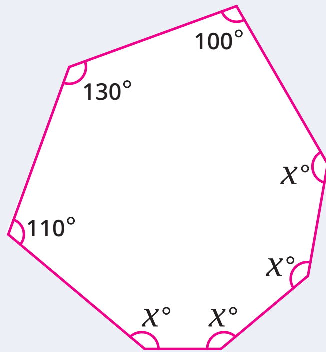
5 أوجد عدد أضلاع مضلع محدب إذا كان عدد أقطاره يساوي

1 65 2 20

الحل

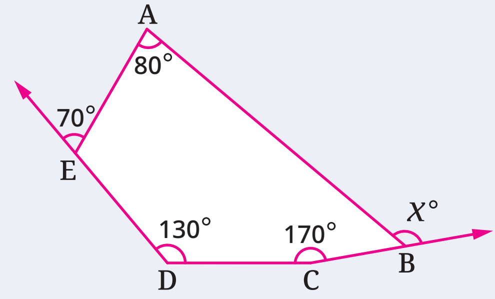
6 في كل من الاشكال الآتية أوجد قيمة x :

1



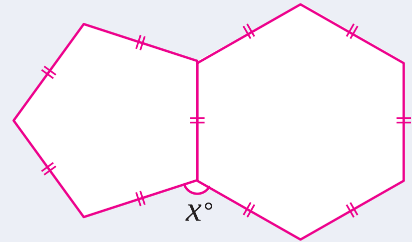
الحل

3



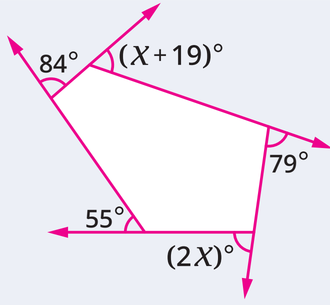
الحل

2



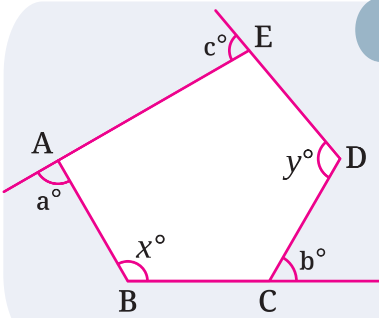
الحل

4



الحل

شغل دماغك



في الشكل المقابل:

$x + y = 230$

أوجد بالبرهان

قيمة : a + b + c

الحل



تمارين على الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1) ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $AB = \frac{1}{2}AC$
فإن : ...... = $m(\angle A)$

(أ) 30 (ب) 60 (ج) 90 (د) 45

2) عدد محور تماثل المثلث المتساوى الساقين يساوي ......
عدد محور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع

(أ) نصف (ب) ضعف (ج) ثلث (د) ثلاثة أمثال

3) مثلث متساوي الساقين طولا ضلعين فيه 8 سم ، 4 سم
فإن طول الثالث .... سم

(أ) 4 (ب) 3 (ج) 12 (د) 8

4) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً
منها بنسبة .... : ...... من جهة القاعدة .

(أ) 1 : 2 (ب) 2 : 1 (ج) 1 : 3 (د) 3 : 1

5) مثلث متساوي الساقين قياس إحدى زواياه 60°
فإن عدد محاور تماثل هذا المثلث ....

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 1 (د) 4

6) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي
الأضلاع = ...

(أ) 180° (ب) 90° (ج) 60° (د) 120°

7) طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30°
في المثلث القائم الزاوية يساوي ...... طول الوتر

(أ) ربع (ب) نصف (ج) ثلث (د) ضعف

8) مثلث متساوي الساقين قياس زاوية رأسه = 80°
فإن قياس زاوية قاعدته = ... سم

(أ) 10 (ب) 40 (ج) 50 (د) 100

9) مثلث طولا ضلعين فيه 4 سم ، 9 سم له محور تماثل
واحد فإن طول الضلع الثالث ..... سم .

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 5 (د) 13

10) في المثلث ABC القائم الزاوية في B إذا كان : AC = 20سم
فإن طول المتوسط المرسوم من B يساوي ...... سم

(أ) 10 (ب) 8 (ج) 6 (د) 5

11) ABC قائم الزاوية في B ،
CB = BA فإن : $m(\angle A) = ...\,...\,^\circ$

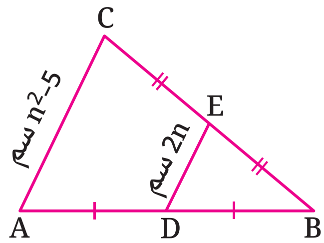
(أ) 90 (ب) 50 (ج) 45 (د) 30

12) المثلث الذي فيه قياسا زاويتين 70° ، 55° يكون ......

(أ) متساوي الساقين (ب) متساوي الأضلاع
(ج) مختلف الأضلاع (د) قائم الزاوية

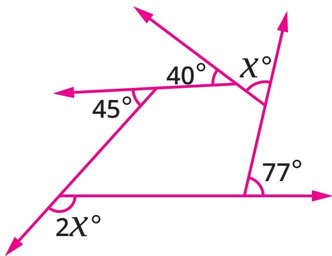
13) في الشكل المقابل :
ما قيمة n ؟

(أ) 5 (ب) 1
(ج) 4 (د) 2



14) في الشكل المقابل :
ما قيمة X ؟

(أ) 77 (ب) 45
(ج) 55 (د) 66



15 فى الشكل المقابل :

N , Q منتصفا $\overline{TR}$, $\overline{SR}$ على الترتيب،

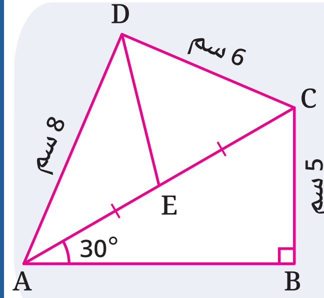
TR = 12 سم ، ST = 9 سم

m (∠ STR) = 90°

فما طول $\overline{MT}$ ؟

(أ) 2.5 سم (ب) 5 سم (جـ) 7.5 سم (د) 15 سم

16 فى الشكل المقابل :



ما طول $\overline{DE}$ ؟

(أ) 6 سم (ب) 8 سم

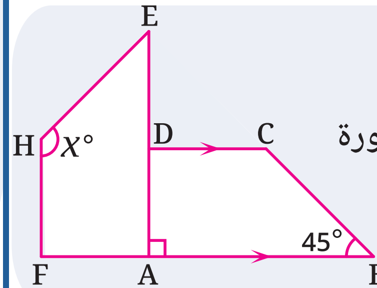
(جـ) 10 سم (د) 5 سم

◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

1 عدد أضلاع المضلع المحدب الذى له 20 قطرًا هو ....

2 نوع المثلث الذى أطوال أضلاعه 6 سم ، 7 سم ، 8 سم بالنسبة لزواياه هو ....

3 فى الشكل المقابل :



إذا كان المضلع AEHF صورة المضلع ABCD بدوران ما،

فإن : X = ...

4 فى الشكل المقابل :

Δ ABC متساوى الأضلاع،

Δ DEF متساوى الساقين

فيه : FD = FE ,

m (∠ F) = 50°

فإن : .... = m (∠ AME)

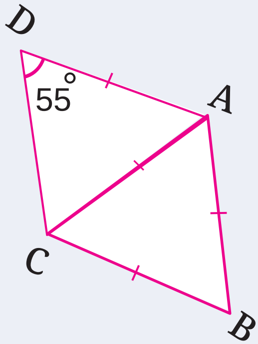
◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

1 AB= AC= BC= AD ،

m (∠ D)= 55°

أوجد m (∠ BCD) ،

m (∠ BAD)



الحل

2 m (∠ B)=90° ،

m (∠BCA) =30° ،

E , F منتصفا $\overline{DA}$, $\overline{DC}$ على الترتيب،

أثبت أن EF =AB

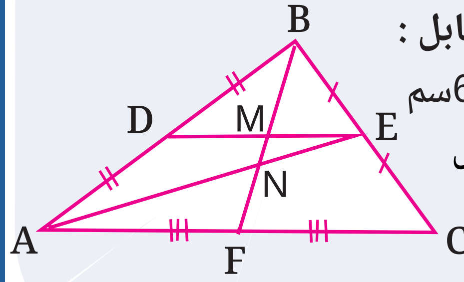
الحل

3 **فى الشكل المقابل :**

إذا كان طول $\overline{DE}$ =6سم

أوجد مع البرهان طول

$\overline{MN}$



الحل

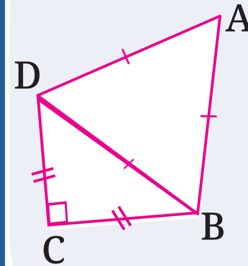
4 **فى الشكل المقابل :**

ΔABC متساوى الأضلاع،

CD =BC

، $m(\angle C)=90°$

أوجد $m(\angle ABC)$



الحل

5 **فى الشكل المقابل :**

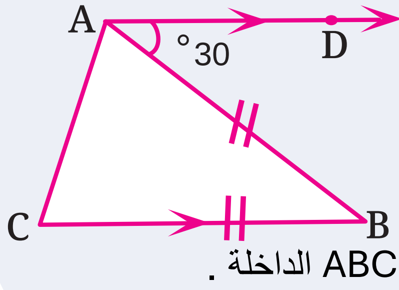
ΔABC فيه :

AB = BC ،

$\overrightarrow{AD} \mathbin{//} \overline{BC}$ ،

$m(\angle DAB) = 30^\circ$

أوجد : قياسات زوايا المثلث ABC الداخلة .



الحل

6 **فى الشكل المقابل :**

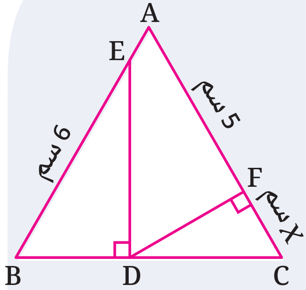
ABC مثلث متساوى الأضلاع

$\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{ED} \perp \overline{BC}$

AF = 5 سم ، BE = 6 سم

طول $\overline{FC} = X$ سم

أوجد قيمة X مع البرهان.



الحل

7 فى الشكل المقابل :

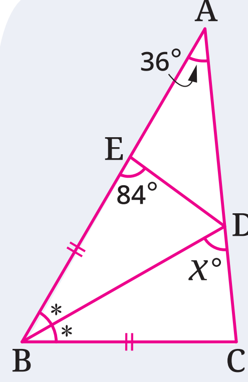
$BC = BE$

$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

① أثبت أن :

$\Delta BCD \cong \Delta BED$

② أوجد قيمة X



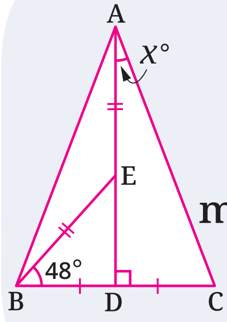
الحل

8 فى الشكل المقابل :

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $BD = CD$

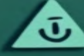
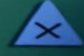
$AE = BE$, $m(\angle EBD) = 48°$

أوجد مع البرهان قيمة X



الحل




الوحدة الرابعة

الدرس الأول	الجدول التكراري المتجمع وتمثيله بيانيا
الدرس الثاني	مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارى ذى المجموعات

1 الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتمثيله بيانياً

تعلم !


درست فيما سبق كيفية تنظيم البيانات في مجموعات أو فترات متساوية وكتابتها في الجدول التكراري ذي المجموعات

الساق	الأوراق
1	3 8
2	4 4 6 6 7 7 8 8 8 9
3	0 2 4 5 5 5 7 9 9
4	1 4 4 7 8
5	2 5

المفتاح	0 | 3 تعني 30 درجة

إذا كان مخطط الساق و الأوراق المقابل يوضح درجات طلاب الصف الثاني الإعدادي في مادة العلوم لعدد 28 طالباً ، فيمكن تكوين جدول تكراري زي مجموعات بإستخدام فترات متساوية مثل .... ، 20 - ، 10 - فيكون الجدول كما يلي :

الدرجات	10 –	20 –	30 –	40 –	50 –
التكرار	2	10	9	5	2

تكوين الجدول التكراري الصاعد


مثال 1

الجدول التكراري المقابل يوضح أفضل نتائج حققها 100 سباح في سباق مسافة 50 متراً .

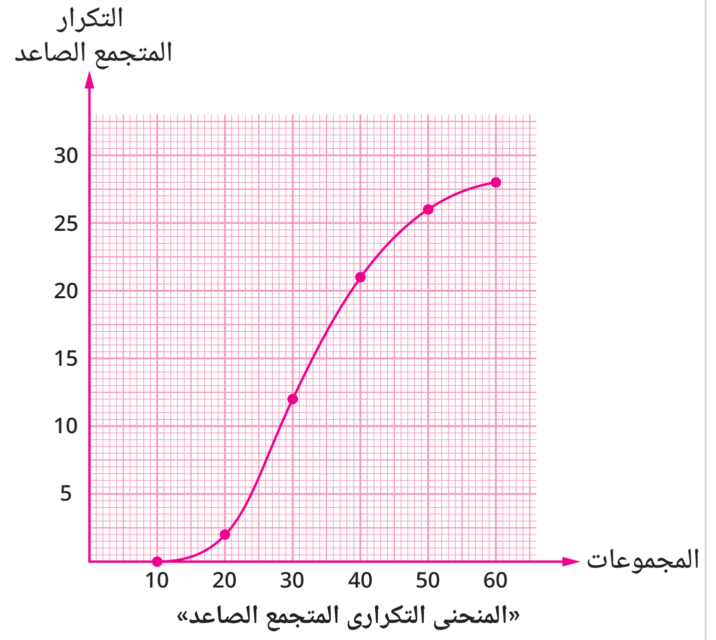
الفترات بالثانية	التكرار
25 –	5
30 –	17
35 –	34
40 –	29
45 –	15

كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانياً ثم أوجد :

1. عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية .
2. عدد السباحين الذين حققوا نتائج 35ثانية أو أكثر .
3. النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية .

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 25	0
أقل من 30	5
أقل من 35	22
أقل من 40	56
أقل من 45	85
أقل من 50	100



1. عدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 40 ثانية هو : 56 سباحاً .

2. عدد السباحين الذين حققوا نتائج35 ثانية أو أكثر هو : 78= 22 – 100

3. النسبة المئوية لعدد السباحين الذين حققوا نتائج أقل من 45 ثانية .هي :

$$\frac{85}{100} \times 100\% = 85\%$$



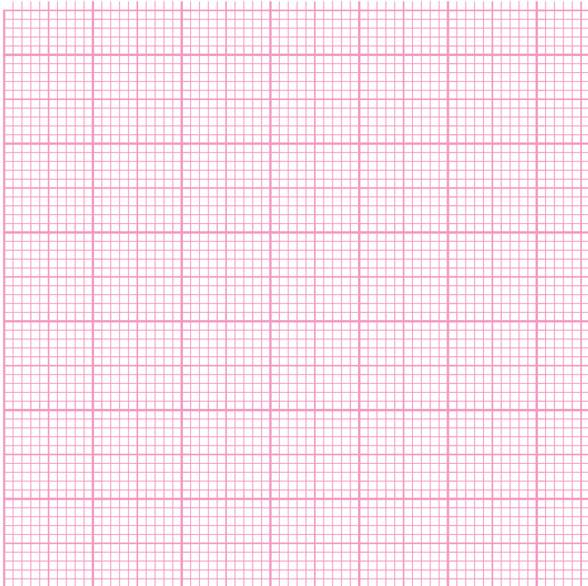
حاول بنفسك 1

الجدول التالي يوضع كتل 20 صندوقاً بالكيلو جرام .

الفترات (كجم)	التكرار
– 45	2
– 50	3
– 55	3
– 60	6
– 65	4
– 70	2

كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانياً .

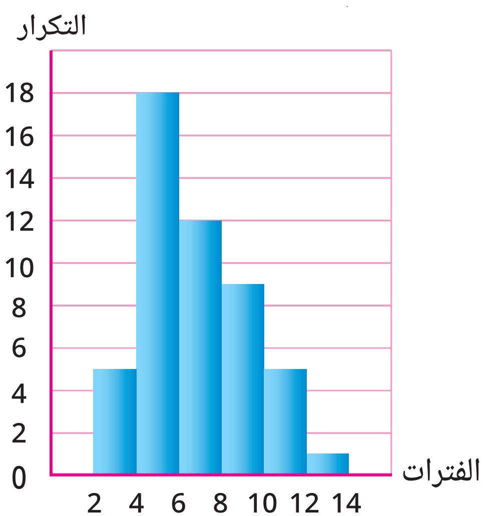
الحل



مثال 2

إذا كان المدرج التكراري المقابل يوضح كتل 50 قطعة من أحد المنتجات معروضة للبيع عبر الإنترنت .

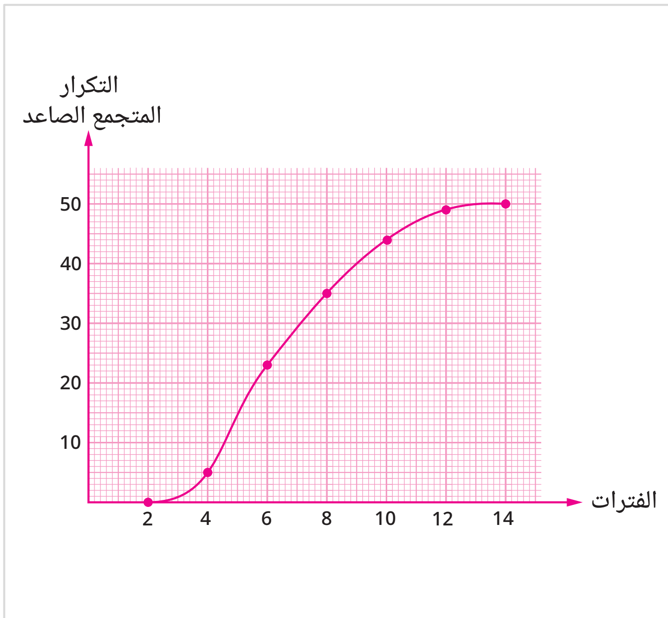
كون الجدول التكراري ذي المجموعات والجدول التكراري المتجمع الصاعد ، ومثله بيانياً .



الحل

الفترات	– 2	– 4	– 6	– 8	– 10	– 12
التكرار	5	18	12	9	5	1

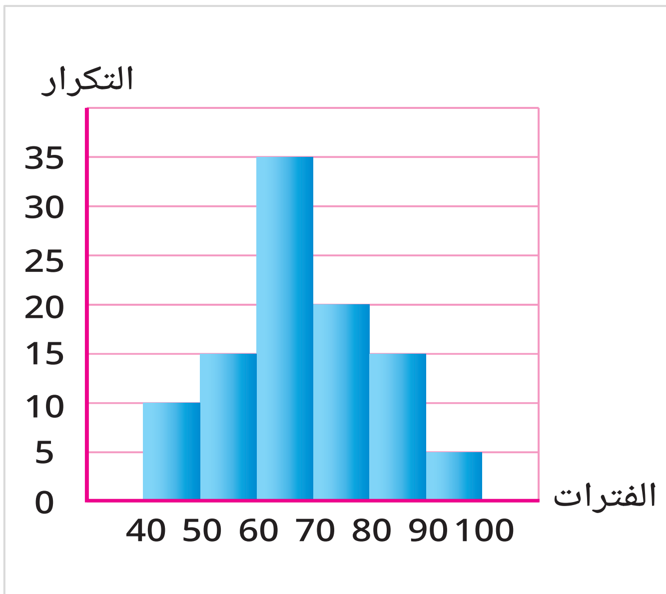
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 2	0
أقل من 4	5
أقل من 6	23
أقل من 8	35
أقل من 10	44
أقل من 12	49
أقل من 14	50





حاول بنفسك 2

إذا كان المدرج التكراري التالي يوضح أطوال 100 سمكة تم اصطيادها في إحدي مسابقات الصيد مقيسة لأقرب سنتيمتر



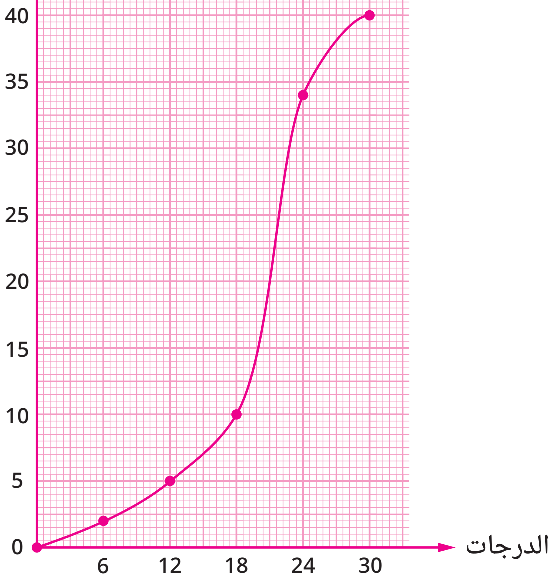
كون الجدول التكراري ذي المجموعات، و الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانياً .



الواجب

أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 الشكل المقابل يمثل المنحني المتجمع الصاعد لدرجات طلاب فصل مكون من 40 طالباً في أحد الامتحانات .



1 ما عدد الطلاب الذين حصلوا علي أقل من 12 درجة ؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 20 (د) 40

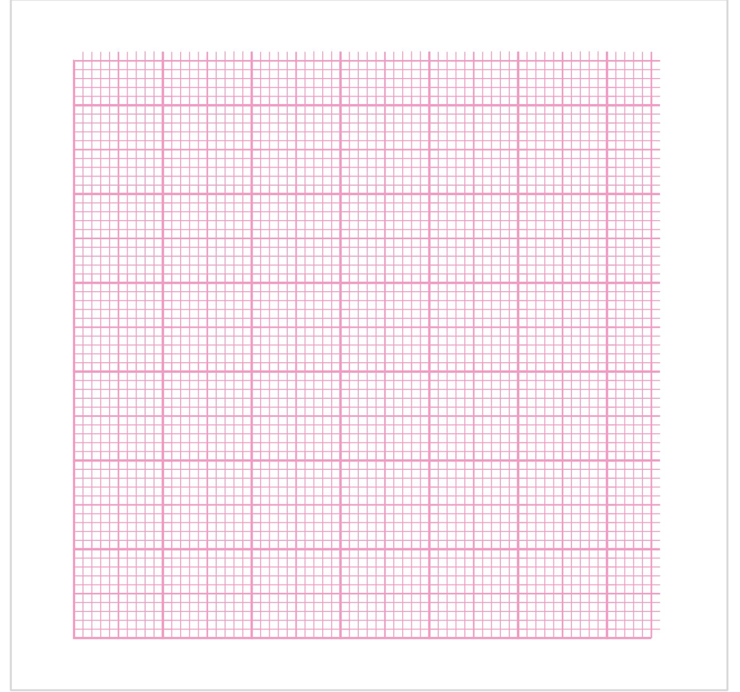
2 ما عدد الطلاب الذين حصلوا علي 18 درجة أو أكثر؟

(أ) 20 (ب) 30 (جـ) 35 (د) 40

3 ما النسبة المئوية للطلاب الذين حصلوا علي أقل من 6 درجات ؟

(أ) 5 % (ب) 10 %

(جـ) 15 % (د) 20 %



ثانيا المقالي

1 قامت إدارة المصانع بدراسة الزمن المستغرق في وصول العاملين إلي المصنع ، وذلك لتحديد أنسب وسائل التنقل ، حتي تحافظ علي أوقات العاملين و العمل .

كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانياً

الفترات (الزمن بالدقيقة)	التكرار (عدد العاملين)
0 –	6
20 –	39
40 –	31
60 –	14
80 –	6
100 –	4

2 الجدول التالي يوضح عدد المنازل ذات المساحات المختلفة (مقيسه بالمتر المربع).

الفترات (م^2)	100 –	150 –	200 –	250 –	300 –	350 –
التكرار	5	23	27	21	9	5

1 كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ومثله بيانياً .

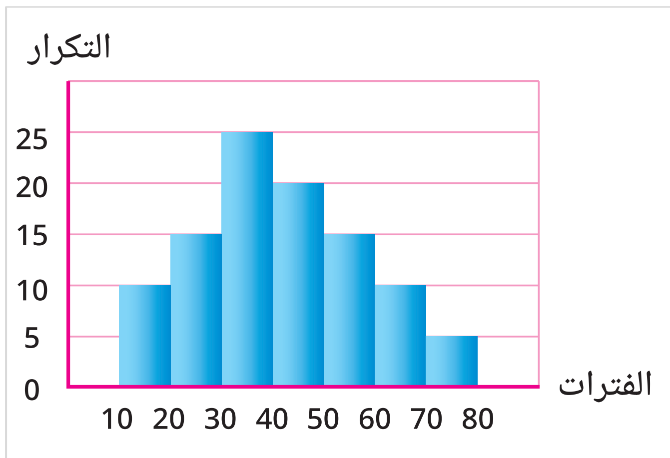
2 أوجد عدد المنازل التي مساحتها أقل من 300 متر مربع

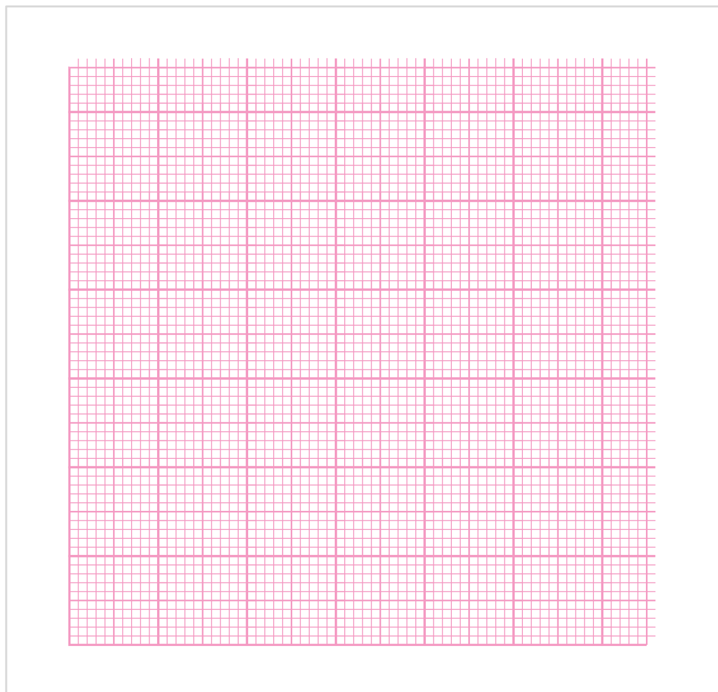
3 أوجد عدد المنازل التي مساحتها 150 متراً مربعاً أو أكثر

4 أوجد النسبة المئوية للمنازل التي مساحتها 250 متراً مربعاً أو أكثر

....

3 من المدرج التكراري المقابل كون الجدول التكراري المتجمع الصاعد ، ومثله بيانياً





2 مقاييس النزعة المركزية للجدول التكراري ذي المجموعات

الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكنك تقدير الوسيط الحسابي لتوزيع تكراري ذي مجموعات باستخدام الصيغة الرياضية التالية

الوسط الحسابي $(\overline{X}) = \frac{\Sigma(f.x_m)}{\Sigma f}$

حيث Σf هو مجموع التكرارات

x_m هو مركز المجموعة =

$$\frac{\text{الحد الأدني للمجموعة} + \text{الحد الأعلي للمجموعة}}{2}$$

$\Sigma(f.x_m)$ هو مجموع حواصل ضرب مركز كل مجموعة x_m في التكرار المناظر لها f



مثال 1

عند قياس سرعات السيارات علي أحد الطرق السريعة ، وجدت إدارة المرور البيانات الآتية عند ملاحظة 100 سيارة في أحد الأيام . قدر الوسط الحسابي لسرعة السيارات المارة في هذا اليوم

السرعة (كم/س)	التكرار
80 –	13
90 –	17
100 –	24
110 –	32
120 –	14

الحل

المجموعات (الفترات)	التكرار (f)	مراكز الفترات (X_m)	$f.X_m$
80 –	13	85	1105
90 –	17	95	1615
100 –	24	105	2520
110 –	32	115	3680
120 –	14	125	1750
المجموع	100		10670

$$\overline{x} = \frac{\Sigma(f.x_m)}{\Sigma f} = \frac{10670}{100} = 106.7$$

∴ الوسط الحسابي لسرعة السيارات = 106.7 كم /س



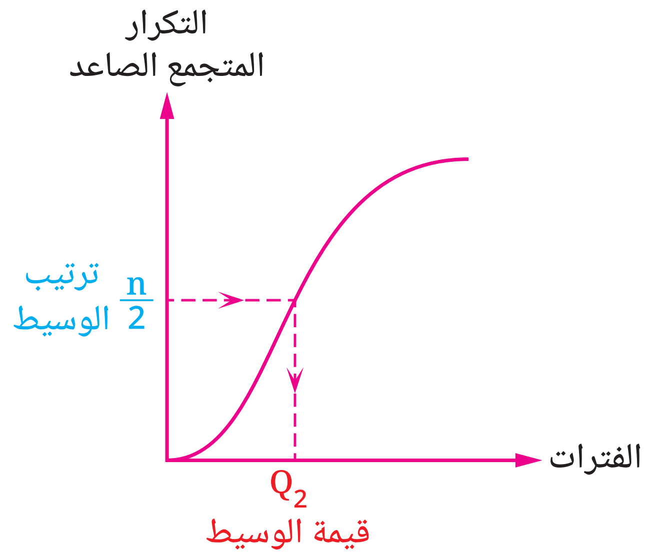
حاول بنفسك 1

يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري لدرجات 60 طالباً في اختبار مادة الرياضيات .

الدرجات	التكرار
5 –	2
10 –	5
15 –	14
20 –	20
25 –	k
30 –	5
35 –	1
المجموع	60

أوجد قيمة k ، ثم ارسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد ومنه قدر قيمة الوسيط

الوسيط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات



- يمكن تقدير الوسيط $(\frac{n}{2})$ حيث n مجموع التكرارات علي المحور الرأسي
- عند ترتيب الوسيط ارسم خطًا أفقيًا يقطع المنحني المتجمع الصاعد في نقطة ، فتكون قيمة الوسيط (Q_2) هي مسقط هذه النقطة علي المحور الأفقي

مثال 2

من بيانات الجدول التالي

المجموعات	0 –	6 –	12 –	18 –	24 –
التكرار	6	8	12	10	4

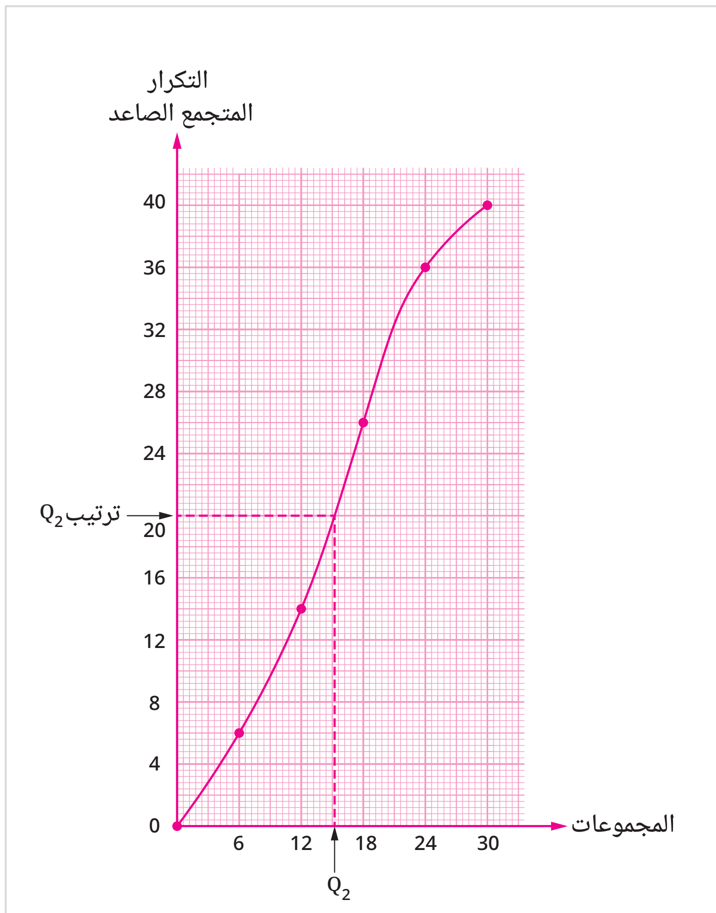
أرسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد وفيه قدر قيمة الوسيط

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

ترتيب الوسيط = $\frac{40}{2}$ = 20

الوسيط (Q_2) = 15



لاحظ أن

يمكن إيجاد قيمة الوسيط (Q_2) من الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالآتي

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 0	0
أقل من 6	6
أقل من 12	14
قيمة الوسيط Q_2	ترتيب الوسيط 20
أقل من 18	26
أقل من 24	36
أقل من 30	40

ترتيب الوسيط = 20

$$\therefore \frac{20-14}{26-14} = \frac{Q_2-12}{18-12}$$

$$\therefore \frac{6}{12} = \frac{Q_2-12}{6}$$

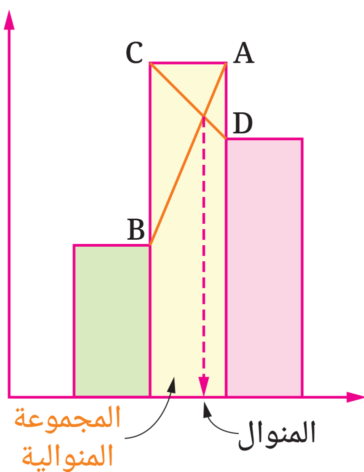
$$\therefore Q_2 - 12 = \frac{6\times 6}{12} = 3$$

$$\therefore Q_2 = 3 + 12 = 15$$

....

المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

يمكنك تقدير المنوال لتوزيع تكراري ذي مجموعات عن طريق رسم المدرج التكراري وتحديد المجموعة الأكثر تكراراً وتسمي المجموعة المنوالية ثم تحديد مسقط نقطة تقاطع $\overline{CD}, \overline{AB}$ علي المحور الأفقي وتكون هي القيمة المنوالية .



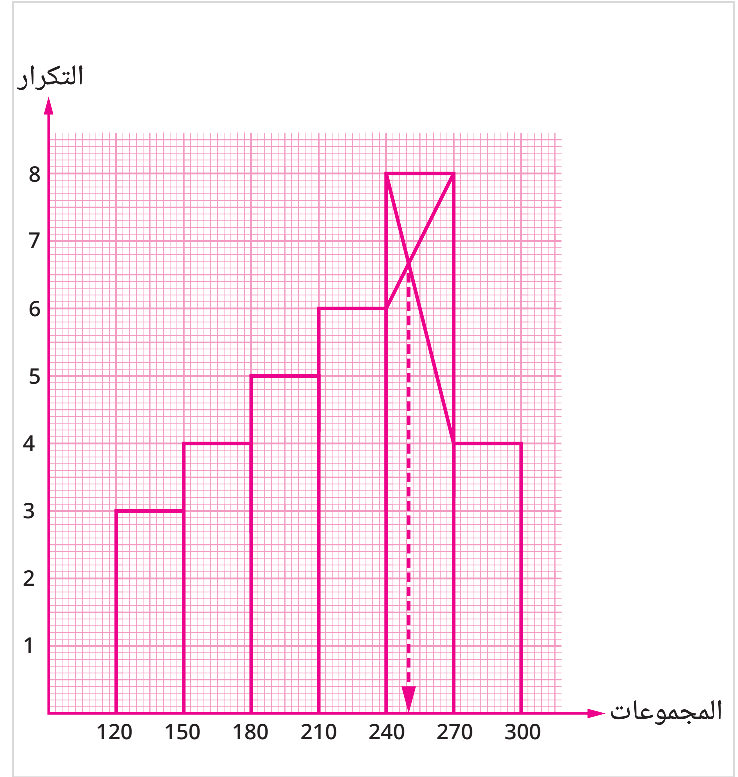
مثال 3

توضح مجموعة البيانات الآتية أوقات استخدام الهاتف المحمول (بالدقائق) لثلاين طالباً جامعياً في أحد الأيام .

الوقت (دقيقة)	عدد الطلاب
120 –	3
150 –	4
180 –	5
210 –	6
240 –	8
270 –	4

قدر المنوال لأوقات استخدام المحمول باستخدام المدرج التكراري

الحل



المنوال ≈ 250 دقيقة



الواجب

أولاً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

1 ما مركز المجموعة الثانية في المجموعات :

-5 ، -15 ، -25 ، -35 ؟

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 20

2 إذا كان : $\Sigma f = 50$ ، $\Sigma f . x_m = 800$ ما الوسط الحسابي $\bar{x}$ ؟

(أ) 16 (ب) 160 (جـ) 750 (د) 850

3 إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما هو 18 ومركزها هو 15.5 ، فما الحد الأدنى لهذه المجموعة ؟

(أ) 12 (ب) 12.5 (جـ) 13 (د) 13.5

4 يوضح الجدول التكراري الآتي درجات 150 طالباً في مادة الرياضيات :

الدرجات	التكرار
4 –	15
12 –	3 k
20 –	4 k
28 –	32
36 –	25
44 –	22
52 –	14
المجموع	150

1 ما قيمة k ؟

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

2 ما ترتيب الوسيط ؟

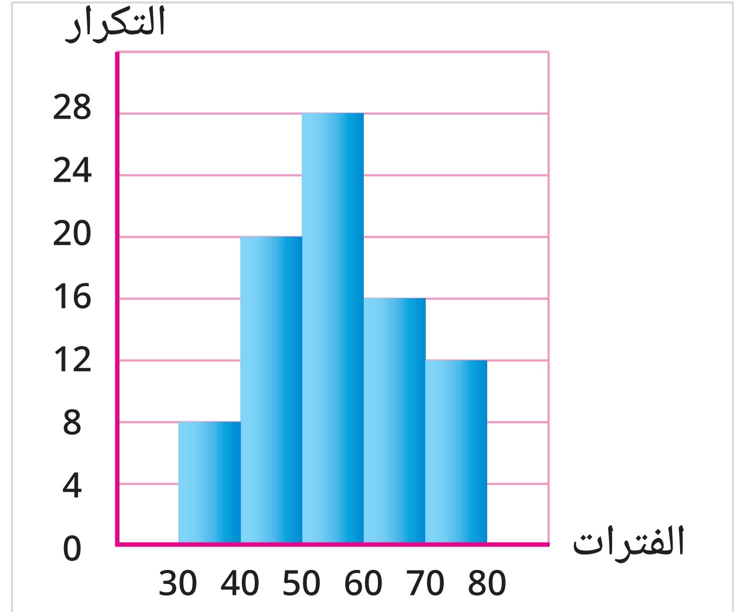
(أ) 37.5 (ب) 75

(جـ) 112.5 (د) 150

3 ما قيمة الوسيط ؟

(أ) 28 (ب) 32.5 (جـ) 34.5 (د) 36

5 من الجدول التكراري المقابل ، ما الفترة المنوالية ؟



(أ) 30 - (ب) 40 - (جـ) 50 - (د) 70 -

6 يبين الجدول التكراري المجتمع الصاعد المقابل عدد ساعات العمل الأسبوعية لعدد 40 عاملاً في أحد المصانع ، ما قيمة الوسيط؟

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من 20	0
أقل من 24	2
أقل من 28	7
أقل من 32	23
أقل من 36	35
أقل من 40	38
أقل من 44	40

(أ) 28.75 (ب) 30.25

(جـ) 24.75 (د) 31.25

ثانيا المقالي

1 يبين الجدول التالي متوسط إنفاق الطالب اليومي داخل مدرسة لعدد خمسين طالباً في الصف الثاني الإعدادي .

الإنفاق (الجنيه)	التكرار
0 –	7
10 –	12
20 –	15
30 –	9
40 –	5
50 –	2

قدر الوسط الحسابي للإنفاق اليومي .

2 يُظهر الجدول التالي أعمال المعلمين المسجلين في دورة تدريبية حول سلامة و أمان المنشآت التعليمية ؟

الأعمار (سنة)	التكرار
26 –	4
30 –	10
34 –	28
38 –	35
42 –	15
46 –	8

ارسم المدرج التكرارى ومنه قدر العمر المنوالى.

3 يبين الجدول التالي كتل 40 شخصاً (بالكيلوجرام) لكي ينضموا إلي أحد برامج إنقاص الوزن قدر الوسط الحسابي بيانياً .

الفترات	التكرار
70 –	2
80 –	5
90 –	9
100 –	12
110 –	7
120 –	3
130 –	2

4 يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري لدرجات 40 طالباً في أحد الاختبارات .

المجموعات	التكرار
5 –	k
10 –	10
15 –	3 k
20 –	8
25 –	k + 2
المجموع	40

أوجد قيمة k ، ثم قدر قيمة الوسيط .